Universidad de Occidente

Doctorado en Ciencias Administrativas

Tesis

Un Enfoque Evolutivo Multiobjetivo para el Problema de Ordenamiento Multicriterio de un Conjunto de Alternativas de Tamaño Mediano

que como requisito para obtener el grado de Doctor en Ciencias Administrativas presenta

MC Diego Alonso Gastélum Chavira

Director de Tesis:

Dr. Juan Carlos Leyva López

Culiacán, Sinaloa. 17 de diciembre de 2014.

Dedicatoria

A Graciela y a Diego

Agradecimientos

La concepción, desarrollo y conclusión de este trabajo de tesis, no hubiese sido posible sin el apoyo de una serie de personas e instituciones. Mi agradecimiento a todos los que formaron parte de este proyecto.

Mi reconocimiento y gratitud a mi director de tesis, Dr. Juan Carlos Leyva López, por su enseñanza, dedicación y confianza hacia mi persona, incluso desde antes de iniciar el programa doctoral. De igual manera, para Dr. Ezequiel Avilés Ochoa y Dr. Eduardo René Fernández González, por las sugerencias y criticas que coadyuvaron al desarrollo de este trabajo de tesis. Seguir sus pasos será un reto difícil que asumiré.

Agradezco a la Universidad de Occidente, por adoptarme como estudiante de este doctorado en Ciencias Administrativas y por proveerme de las condiciones y facilidades necesarias para mi desenvolvimiento profesional, realmente me sentí como en casa. De manera particular, mi gratitud a Dr. Ramón Martínez Huerta, Dra. Lydia María López Barraza y Lic. Karla María Mascareño Sánchez.

De igual manera a la Universidad Autónoma de Sinaloa, por el apoyo académico y laboral para dedicarme de manera exclusiva a este doctorado. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Programa de Mejoramiento del Profesorado por su soporte económico.

A los directivos de la empresa Green Side de Los Mochis, Sinaloa, por abrir sus puertas y por la confianza en nuestro proyecto. Sin duda, trabajar con ellos me dejó un enorme aprendizaje. También, a los directivos de la empresa RQPortillo Firm de Culiacán, Sinaloa, por creer en la pertinencia de esta investigación y permitirnos trabajar juntos.

Así mismo, a MC Jesús Jaime Solano Noriega, compañero y amigo de investigación, por su invaluable apoyo en el análisis, diseño, desarrollo y prueba del algoritmo evolutivo multiobjetivo, su ayuda fue clave para la culminación de este doctorado.

A mis amigos y compañeros del doctorado, Universidad de Occidente, Facultad de Informática Culiacán UAS. Gracias a todos ustedes.

Un especial agradecimiento a Graciela, mi esposa y a mi hijo Diego. Muchos fueron los momentos que no estuve con ellos, sin embargo, estuvieron siempre apoyándome y motivándome para continuar con este compromiso. De igual manera, un especial agradecimiento a mi madre, hermanos y a la familia de mi esposa, mi familia desde hace poco más de 5 años.

Gracias.

Índice General

Índice de tablas i
Índice de figuras iii
Abreviaturas, siglas y acrónimos v
Resumen vi
Abstract vii
Marco de la investigación viii
Introducción ix

Capítulo 1 . Marco contextual y planteamiento del problema 1
1.1. Contextualización del problema de investigación 1
1.1.1. Problema de ordenamiento 1
1.1.2. El problema de ordenamiento multicriterio 1
1.1.3. Problema de ordenamiento multicriterio en la empresa 6
1.2. Planteamiento del problema 9
1.2.1. Escenarios futuros 10
1.2.2. Alternativas de solución 11
1.2.3. Formulación del problema 12
1.2.3.1. Interrogante central 12
1.2.4. Sistematización del problema de investigación 12
1.2.4.1. Preguntas de investigación 12
1.3. Delimitación del problema 13
1.4. Objetivos 14
1.4.1. Objetivo general 14
1.4.2. Objetivos específicos 14
1.5. Justificación 15
1.6. Hipótesis 17

1.6.1. Hipótesis general 17
1.6.2. Hipótesis específicas 18
1.7. Limitaciones del estudio 18
Capítulo 2 Marco teórico, conceptual y referencial 19
2.1. Introducción 19
2.2. Apoyo a la toma de decisiones con múltiples criterios 20
2.2.1. Preámbulo 20
2.2.2. Antecedentes 22
2.3. El proceso de decisión 24
2.4. Enfoques del apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios 27
2.6. Proceso de la decisión con MCDA 32
2.7. Pilares del MCDA 33
2.7.1. Alternativas de decisión 33
2.7.2. Familia coherente de criterios 34
2.7.3. Tipo de problema a tratar 34
2.8. Modelación de preferencias con el método ELECTRE 36
2.8.1. Introducción al enfoque de sobreclasificación 37
2.8.1.1. Anotaciones preliminares y definiciones 37
2.8.1.2. El concepto de sobreclasificación: nivel de preferencias restringida al criterio g_j. 38
2.8.1.3. Nivel de preferencias integral 38
2.8.1.4. Propiedades fundamentales de las relaciones de sobreclasificación 39
2.9. Optimización multiobjetivo 41
2.9.1. Algoritmos 45
2.9.2. Espacios de búsqueda y optimización 46
2.9.3. Metaheurísticas 48

2.9.3.1. Algoritmos evolutivos 49
2.9.3.1.1. Algoritmos genéticos 50
2.10. Ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano 51
2.10.1. Fundamentos del problema de agrupamiento 51
2.10.2. Antecedentes y trabajos relacionados 57
2.10.3. Ordenamiento multicriterio visto como un problema de optimización 61
2.10.4. Resumen 64
Capítulo 3 . Metodología de la investigación 65
3.1. Estrategia de investigación 65
3.1.1. Metodología empleada en la investigación 65
3.1.2. Tipo de investigación 66
3.1.3. Consideraciones para su aplicación 67
3.1.4. Criterios de validez 68
3.2. Investigación experimental 69
3.4.1. Diseño de la investigación experimental 69
3.4.1.1. Primera parte: el algoritmo evolutivo multiobjetivo y la recomendación 70
3.4.1.1.2. Funcionamiento general del algoritmo evolutivo multiobjetivo (MOEA) 70
3.4.1.1.2.1. Comparando alternativas y clases de alternativas 71
3.4.1.1.2.2 Funciones objetivo 73
3.4.1.1.2.3. Procedimiento para la asignación de la adaptación de los individuos 77
3.4.1.1.2.4. Componentes del MOEA 82
3.4.1.1.2.4.2. La población inicial 84
3.4.1.1.2.4.3. Operadores 86
3.4.1.1.2.4.4. Reemplazo de la Población 88
3.4.1.1.3. Paso final para obtener una recomendación (POSET) 89

3.4.1.2. Segunda parte: prueba y evaluación del MOEA-POSET 90
3.4.1.2.1. Descripción del experimento 92
3.4.1.2.2. Los factores 93
3.4.1.2.3. Generación de datos 93
3.4.1.2.4. Evaluación de los resultados 95
3.4.1.2.5. Configuración del MOEA-POSET 96
3.5. El método de destilación vs rankings inducidos 96
3.5.1. Tamaño y selección de la muestra 97
3.5.2. Generación de los ordenamientos con el método de destilación 98
3.5.3. Método de validación de la prueba 99
3.6. Estudio de caso: Ordenamiento de solicitantes de crédito en una empresa parafinanciera 100
3.6.1. Estrategia para el abordaje del estudio de caso 100
3.6.1.1. Fase de inteligencia 100
3.6.1.2. Fase de diseño 101
3.6.1.3. Fase de elección 101
Capítulo 4 . Resultados de la investigación 103
4.1 Introducción 103
4.2 Resultados de la prueba del MOEA vs ordenamientos inducidos 103
4.2.1 Descripción estadística global de los resultados 104
4.2.2 Descripción estadística de los resultados por factor 107
4.2.2.1 Resultados por el factor L 107
4.2.2.1 Resultados por el número de clases 114
4.2.2.1 Resultados por el número de alternativas 121
4.3 Resultados de la prueba del método de destilación vs ordenamientos inducidos 129
4.4 Análisis de los resultados de las pruebas 130

Capítulo 5 . Estudio de caso: Ordenamiento de solicitantes de crédito en una empresa parafinanciera 138

5.1. Contexto del estudio 138

5.2. Configuración del proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios . 139

5.3 Fuente de datos 140

5.4 Criterios de evaluación 140

5.5. Procedimiento y metodología 146

5.5.1. Umbrales 148

5.5.2. Pesos 148

5.6. Modelo preferencial 149

5.7. Resultados obtenidos 149

5.8. Conclusiones y recomendaciones del estudio 151

Capítulo 6. Resumen, conclusiones y recomendaciones de la investigación 154

6.1. Resumen general de la investigación 154

6.2. Conclusiones 155

6.3. Contribución a las ciencias administrativas 162

6.4. Obstáculos 162

6.5. Trabajo futuro y recomendaciones 163

Referencias

Anexos

Apéndices

Índice de tablas

Tabla 1.1. Número de formas para crear particiones, ordenes totales y preordenes totales con n elementos.....16
Tabla 2.1. Características principales de los enfoques de la teoría de la decisión. 28
Tabla 2.2. Ejemplo numérico del concepto de sobreclasificación. 39
Tabla 2.3. Distintas maneras de agrupar un conjunto de tres elementos.....53
Tabla 2.4. Ejemplo del número de posibles agrupamientos en k clases no vacías. 54
Tabla 2.5. Número de agrupamientos ordenados para diferentes cantidades de elementos. 55
Tabla 3.1. Tipo de investigación del trabajo de investigación 67
Tabla 3.2. Diseño experimental de la prueba del MOEA-POSET vs rankings inducidos. 93
Tabla 4.1. Factores de utilizados en la prueba del MOEA-POSET vs rankings inducidos 104
Tabla 4.2. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET 104
Tabla 4.3. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 3$ 108
Tabla 4.4. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 5$ 109
Tabla 4.5. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 7$ 110
Tabla 4.6. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 9$ 112
Tabla 4.7. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 11$ 113
Tabla 4.8. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 3 clases.....114
Tabla 4.9. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 5 clases.....116
Tabla 4.10. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 7 clases.....117
Tabla 4.11. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 9 clases.....118
Tabla 4.12. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 11 clases.....120
Tabla 4.13. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 15 alternativas .121
Tabla 4.14. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 30 alternativas. 123
Tabla 4.15. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 60 alternativas. 124
Tabla 4.16. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 90 alternativas. 125
Tabla 4.17. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 120 alternativas126
Tabla 4.18. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 150 alternativas128
Tabla 4.19. Resultados de la prueba: método de destilación vs rankings inducidos.....129

Tabla 4.20. Desempeño del MOEA-POSET con 5,000 y 50,000 generaciones. 134
Tabla 5.1. Criterios tomados en consideración en el estudio de caso. 140
Tabla 5.2. Desempeño de las alternativas en cada criterio.....145
Tabla 5.3. Desempeño de las alternativas transformadas con las funciones y escalas definidas. 145
Tabla 5.4. Distribución de frecuencias relativas de los 105 productores por criterio. 146
Tabla 5.5. Umbrales de indiferencia (q), preferencia (p) y veto (v).....148
Tabla 5.6. Pesos de los criterios obtenidos a través de la teoría de construcción personal.....148
Tabla 5.7. Resultados del MOEA-POSET ordenado por la posición de la clase en el ranking...150

Índice de figuras

Figura 1.1. Diferentes estructuras de ordenamiento. 3
Figura 1.2. Ejemplos de métodos para obtener grupos ordenados de alternativas 5
Figura 2.1. Modelado general de preferencias. 32
Figura 2.2. Ejemplo de categorías de los problemas discretos y continuos. 34
Figura 2.3. Las cuatro configuraciones posibles en la comparación de dos acciones a' y a 40
Figura 2.4. Ejemplo de aplicación del algoritmo de búsqueda escalador de colinas 47
Figura 2.5. Secuencia de operaciones de un algoritmo genético. 51
Figura 3.1. Modelo para el abordaje general de la investigación. 66
Figura 3.2. Preorden parcial de un conjunto de alternativas. 71
Figura 3.3. Familia anidada de relaciones de sobreclasificación crisp. 74
Figura 3.4. Rangos de individuos de una población para una generación determinada. 80
Figura 3.5. Centro de masa de un conjunto de individuos. 82
Figura 3.6. Representación de proximidad basada en locus para un individuo p 83
Figura 3.7. Decodificación de la representación de proximidad basada en locus. 83
Figura 3.8. Relación de sobreclasificación crisp de clases con su diagrama de Hasee. 90
Figura 3.9. Representación de una solución del MOEA-POSET sin inconsistencias. 91
Figura 3.10. Representación de una solución del MOEA-POSET con inconsistencias. 91
Figura 3.11. Modelo de generación de datos para el MOEA-POSET. 94
Figura 3.12. Modelo para el procesamiento de los datos por el MOEA-POSET. 95
Figura 3.13. Ordenamiento de clases *O'* del MOEA-POSET vs. el ranking inducido *O*. 95
Figura 3.14. Flujo de trabajo en diviz para prueba con el método de destilación. 99
Figura 4.1. Histograma del estudio empírico. 107
Figura 4.2. Histograma del estudio empírico para $L = 3$. 108
Figura 4.3. Histograma del estudio empírico para $L = 5$. 110
Figura 4.4. Histograma del estudio empírico para $L = 7$. 111
Figura 4.5. Histograma del estudio empírico para $L = 9$. 112
Figura 4.6. Histograma del estudio empírico para $L = 11$. 114
Figura 4.7. Histograma del estudio empírico con 3 clases. 115
Figura 4.8. Histograma del estudio empírico con 5 clases. 116

Figura 4.9. Histograma del estudio empírico con 7 clases. 118
Figura 4.10. Histograma del estudio empírico con 9 clases. 119
Figura 4.11. Histograma del estudio empírico con 11 clases. 121
Figura 4.12. Histograma del estudio empírico con 15 alternativas. 122
Figura 4.13. Histograma del estudio empírico con 30 alternativas. 123
Figura 4.14. Histograma del estudio empírico con 60 alternativas. 125
Figura 4.15. Histograma del estudio empírico con 90 alternativas. 126
Figura 4.16. Histograma del estudio empírico con 120 alternativas. 127
Figura 4.17. Histograma del estudio empírico con 150 alternativas. 128
Figura 4.18. Resultados del MOEA-POSET para *L*=3 130
Figura 4.19. Resultados del MOEA-POSET para *L*=5 131
Figura 4.20. Resultados del MOEA-POSET para *L*=7 132
Figura 4.21. Resultados del MOEA-POSET para *L*=9 132
Figura 4.22. Resultados del MOEA-POSET para *L*=11 133
Figura 4.23. Resultados del MOEA-POSET con 5,000 y 50,000 generaciones. 136
Figura 5.1. Proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios del estudio. 139
Figura 5.2. Orden de clases de obtenidos por el MOEA-POSET 150
Figura 5.3. Score de crédito de una persona física obtenido del Buró de Crédito. 153

Abreviaturas, siglas y acrónimos

DM	Tomador de Decisiones.
ELECTRE	Eliminación y Elección Expresando la Realidad.
ELECTRE-MOEA	Eliminación y Elección Expresando la Realidad - Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo.
K-MEANS	Algoritmo de agrupamiento k-medias.
MCDA	Análisis Multicriterio para la Toma de Decisiones
MOEA	Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo.
MOEA-POSET	Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo – Conjunto Parcialmente Ordenado
MOGA	Algoritmo Genético Multiobjetivo.
MST	Árbol de Expansión Mínima
NPGA	Algoritmo Genético de Nicho de Pareto.
NSGA	Algoritmo Genético de Ordenamiento No Dominado.
PCT	Teoría de Construcción Personal
POSET	Conjunto Parcialmente Ordenado
PROMETHEE	Método de Organización de Ordenamientos de Preferencias para el Enriquecimiento de las Evaluaciones.
SPEA	Algoritmo Evolutivo Fuerte de Pareto.

Resumen

Dado un conjunto de alternativas, el problema de ordenamiento multicriterio consiste en asignar un rango o rank a cada alternativa. En este ordenamiento, dos alternativas pueden ser asignadas a un mismo rank si son indiferentes entre sí. Ante esa situación, se forma un orden total o parcial de clases de alternativas, el cual está asociado a las preferencias de un tomador de decisiones.

Métodos del análisis multicriterio para la toma de decisiones, diseñados para abordar el problema de ordenamiento, tales como ELECTRE-III y PROMETHEE II, dividen el problema en dos fases: modelación de preferencias del tomador de decisiones y explotación del modelo. Una vez obtenido el modelo de preferencias, la fase de explotación es conducida. La principal dificultad de esta fase, consiste en encontrar formas adecuadas para tratar la intransitividad, sin generar demasiadas inconsistencias respecto al modelo de integración de preferencias.

Por ello, para minimizar esas inconsistencias, en este trabajo de investigación se abordó el problema de la explotación del modelo de agregación de preferencias del tomador de decisiones, en el marco de la optimización multiobjetivo. Las ventajas conceptuales de la formulación multiobjetivo son discutidas y se introduce un nuevo algoritmo evolutivo multiobjetivo. Este algoritmo transforma una relación de sobreclasificación valuada conocida, en una relación de sobreclasificación crisp de un conjunto de clases de alternativas, donde los elementos de cada clase son indiferentes entre sí. Después de ello, se explota la relación crisp con un algoritmo del tipo "función de elección" para obtener una recomendación en forma de orden parcial de clases de alternativas para el problema de ordenamiento de conjuntos de alternativas de tamaño mediano. El método completo es llamado MOEA-POSET. El desempeño del MOEA-POSET fue evaluado con una batería de instancias del problema de ranking multicriterio de tamaño mediano. Los resultados indican que el método propuesto puede utilizarse eficazmente para resolver problemas de este tipo. Así también, con la metodología propuesta, se desarrolla un estudio de caso sobre el problema de solicitantes de crédito en una empresa parafinanciera del noroeste de México y se emite una recomendación al problema en forma de ordenamiento de solicitantes de crédito en orden de preferencia decreciente.

Palabras clave: Análisis multicriterio para la toma de decisiones, Relaciones de sobreclasificación valuada, Ordenamiento Multicriterio, Algoritmos evolutivos multiobjetivos.

Abstract

Given a set of alternatives, the multicriteria ranking problem consists of assigning a rank each alternative. In this ranking, two alternatives can be assigned to the same rank, if both are indifferent to each other. In response, a total or partial ranking of classes of alternatives is formed, which is associated to the preferences of a decision maker.

Different methods of Multicriteria Decision Analysis are designed to address the ranking problem, such as ELECTRE III and PROMETHEE II, dividing the problem into two phases: modeling preferences of the decision maker and exploitation of the model. Once obtained the preference model, the exploitation phase is conducted. The main difficulty of this phase is to find adequate ways to address the intransitivity problem, without generating too many inconsistencies regarding the integration model of preference.

For that reason, in order to minimize the number of inconsistencies, in this work, the exploitation of the preference aggregation model of the decision maker is tackled by using a multiobjective optimization approach. The conceptual advantages of the multiobjective formulation are discussed and a new multiobjective evolutionary algorithm is introduced. This algorithm transforms a known valued outranking relation into an antisymmetric crisp outranking relation, on a set of classes of alternatives, where the elements of each class are indifferent each other. After that, through of a type "choice function" algorithm, a recommendation for the ranking problem of medium-sized set of alternatives in form of a partial preorder of classes of alternatives is proposed. The whole method is called MOEA-POSET. The performance of the MOEA-POSET was assessed with a battery of instances of medium-sized multicriteria ranking problems. The results indicate that the proposed method can effectively be used to solve this kind of ranking problems. Also, by using the proposed methodology, a case study on the problem of credit applicants into a company in the Northwest of Mexico was addressed and a recommendation to the problem in form of ranking of credit applicants in decreasing preference order was obtained.

Keywords: Multicriteria decision analysis, Valued outranking relations, Multicriteria ranking, Multiobjective evolutionary algorithms.

Marco de la investigación

Un Enfoque Evolutivo Multiobjetivo para el Problema de Ordenamiento Multicriterio de un Conjunto de Alternativas de Tamaño Mediano

Capítulo 1 Marco contextual y planteamiento del problema	Contextualización del problema de investigación, planteamiento del problema, interrogante central y preguntas de investigación, objetivos, justificación, hipótesis, limitaciones.
Capítulo 2 Marco teórico, conceptual y referencial	Análisis multicriterio para la toma de decisiones, tipos de problemas tratados en el análisis multicriterio, proceso de decisión multicriterio para la toma de decisiones, enfoques de apoyo para la toma de decisiones multicriterio, modelación de preferencias, optimización multiobjetivo, metaheurísticas, problema de agrupamiento, problema de ordenamiento multicriterio, etc.
Capítulo 3 Metodología de la Investigación	Metodología y estrategia de investigación empleada. Diseño y desarrollo del enfoque propuesto para el problema de ordenamiento de conjuntos de alternativas de tamaño mediano. Pruebas y evaluación del modelo. Prueba del método de destilación utilizando una muestra de los datos de entrada. Descripción y estrategia de un estudio de caso en el ámbito de las ciencias administrativas, etc.
Capítulo 4 Resultados de la Investigación	Descripción y análisis de los resultados de las pruebas realizadas al enfoque propuesto. Resultado de la prueba realizada al método de destilación.
Capítulo 5 Estudio de caso: Ordenamiento de solicitantes de crédito en una empresa parafinanciera	Aplicación del enfoque evolutivo multiobjetivo propuesto en una empresa que otorga crédito a productores agrícolas en la zona norte del estado de Sinaloa, México.
Capítulo 6 Resumen, conclusiones y recomendaciones de la investigación	Resumen general, conclusiones, contribución a las ciencias administrativas, obstáculos presentados durante la investigación, trabajo futuro y recomendaciones.

Introducción

La toma de decisiones es un proceso mental, llevado a cabo para la selección de un curso de acción de entre diferentes escenarios, derivados por un conjunto de alternativas de decisión. Este proceso mental puede ser racional o irracional. Dicho proceso es llevado a cabo por un tomador de decisiones (DM por sus siglas en inglés), quien es la persona o grupo de personas, que determinan el curso de acción de tales escenarios

Es posible que diversas decisiones realizadas por un DM, sean llevadas a cabo de forma intuitiva, debido a la imposibilidad de identificar y evaluar cada alternativa de decisión. Por ello, cuando el tomador de decisiones hace un análisis de las alternativas, lo hace tomando en cuenta solo un conjunto finito de ellas.

La evaluación de un conjunto de alternativas, puede realizarse utilizado un sólo criterio o múltiples criterios. Cuando se utiliza un solo criterio, por ejemplo, el precio de un producto o la tasa de interés de un producto financiero, es relativamente fácil para el DM definir cual o cuales alternativas serán elegidas. Por otro lado, cuando en la evaluación de las alternativas se considera simultáneamente un conjunto de criterios, el tomador de decisiones está frente a una situación de mayor complejidad a la anterior situación, ya que es posible la existencia de alternativas cuyo desempeño en ciertos criterios supere a otras, pero al mismo tiempo, estas alternativas sean superadas en los otros criterios. Este tipo de problema puede ser definido como un problema de decisión multicriterio para la toma de decisiones.

La mayoría de los problemas de decisión multicriterio para la toma de decisiones, donde existen diversas alternativas y criterios de evaluación, son de naturaleza combinatoria multiobjetivo, por lo que el espacio de búsqueda es complejo de explorar. Además, regularmente no existe una única solución óptima.

Frecuentemente, dentro de la empresa, numerosas decisiones implican múltiples criterios; por ejemplo, un gerente del departamento de recursos humanos, podría estar tratando de enfocar sus esfuerzos para seleccionar uno o varios candidatos a ocupar espacios vacantes dentro de la

empresa y el interés del gerente sea reclutar individuos que trabajen en equipo, con experiencia en el manejo de maquinaria especializada, con buen nivel de razonamiento para la solución de problemas, con buen nivel de comunicación, entre otros criterios.

Ese tipo problemas pueden ser abordados con métodos del análisis multicriterio para la toma de decisiones. Algunos de ellos, con ayuda de algoritmos y programas de cómputo que permiten obtener resultados acordes a las preferencias del tomador de decisiones. Sin embargo, de forma general estos problemas son de naturaleza exponencial, es decir, su tratamiento se vuelve más complejo en la medida que se agregan alternativas de decisión.

Por lo anterior, en este trabajo de investigación se diseñó y desarrolló un algoritmo evolutivo multiobjetivo, el cual transforma una relación de sobreclasificación valuada conocida, en una relación de sobreclasificación crisp de un conjunto de clases de alternativas, donde los elementos de cada clase son indiferentes entre sí, después de ello, se explota la relación crisp con un algoritmo del tipo "función de elección" para obtener una recomendación en forma de orden parcial de clases de alternativas al problema de ordenamiento de alternativas de tamaño. Esto con el objetivo de apoyar al tomador de decisiones a enfrentar problemas donde se requiera ordenar un conjunto de tamaño mediano de alternativas, evaluadas por múltiples criterios. A continuación se presenta la organización del documento:

En el primer capítulo, se presenta la contextualización del problema de investigación, así como el planteamiento del problema, la interrogante central y las preguntas de investigación. De igual manera, se presenta el objetivo general y los específicos, la justificación, las hipótesis y las limitaciones de la investigación.

Por su parte, el segundo capítulo trata la revisión de la literatura. Entre otros aspectos, se abordan los elementos fundamentales del análisis multicriterio para la toma de decisiones, los tipos de problemas tratados en esta área, enfoques del apoyo para la toma de decisiones multicriterio, modelación de preferencias, el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, etc.

En el tercer capítulo se presenta la metodología utilizada en la investigación. De manera detallada, se expone el diseño del MOEA-POSET. Se aborda también, el diseño de los experimentos y un estudio de caso para mostrar la aplicabilidad del método propuesto, así como los elementos de la metodología de la investigación, que permitieron llevar a cabo este trabajo.

Por otro lado, los resultados de la investigación referentes a las pruebas del algoritmo y del estudio de caso propuesto, son presentados respectivamente en los capítulos cuarto y quinto.

Finalmente, en el sexto capítulo, se presentan las conclusiones, recomendaciones, contribuciones, obstáculos y trabajo futuro de la investigación.

Se espera que este trabajo doctoral, permita apoyar a los tomadores de decisiones de las diversas organizaciones, a enfrentar problemas de ordenamiento de conjuntos de alternativas de tamaño mediano. De igual manera, se espera que éste pueda ser utilizado como base para realizar investigaciones relacionadas esta temática.

Capítulo 1 . Marco contextual y planteamiento del problema

En este capítulo se aborda el ambiente donde se circunscribe el problema de investigación, así como su descripción y definición formal. De igual manera, se definen las alternativas de solución y que sucedería si no se resuelve dicho problema. Además, se presenta la sistematización de la investigación que consiste en las preguntas la investigación, delimitación del problema, objetivos, justificación, hipótesis y las limitaciones del estudio.

1.1. Contextualización del problema de investigación

1.1.1. Problema de ordenamiento

De manera general, un ordenamiento es una relación jerárquica entre objetos o elementos que lo componen. En la comparación de cualquier par de elementos a y b, puede suceder que a está mejor, igual o peor ubicada que b. Además, su formación es realizada con base a la comparación de los objetos que lo conforman, donde la propiedad de transitividad es requerida.

Dado un conjunto de n objetos y un conjunto de comparaciones binarias entre pares de objetos, el problema de ordenamiento del conjunto de objetos, sobre la base de dichas comparaciones binarias, consiste en inferir un orden sobre ellos el cual, agrega mediciones dadas. Ajustes comunes para este problema, permiten comparaciones binarias para medir, ya sea de forma activa o asumir que todas las $n(n-1)/2$ comparaciones son conocidas. El crecimiento de orden cuadrático $O(n^2)$ de las comparaciones entre los n objetos, usualmente prohíben la medición exhaustiva cuando n es grande (Wauthier, Jordan y Jojic, 2013). Por ejemplo, para ordenar un conjunto de 2 objetos, se requiere realizar una sola comparación, para 5 objetos 10 comparaciones, mientras que para 50 objetos, se requieren 1125 comparaciones.

1.1.2. El problema de ordenamiento multicriterio

El proceso de decisión consiste principalmente a las actividades cognitivas que realiza un tomador de decisiones (DM por sus siglas en inglés), frente a una situación de decisión donde no se dispone una respuesta automática. Este proceso de decisión se presenta en diferentes ámbitos de la vida cotidiana, desde lo individual hasta en organizaciones públicas, privadas y sociales.

Actualmente, uno de los enfoques operativos utilizado para resolver problemas de decisión, es el Análisis Multicriterio para la Toma de Decisiones (MCDA, por sus siglas en inglés), área de la Investigación de Operaciones que proporciona una estructura metodológica para el tratamiento de problemas de decisión complejos con múltiples criterios en conflicto.

El objeto y alcance de MCDA es apoyar a los tomadores de decisiones a abordar problemas complejos de decisión. MCDA no es el único campo de estudio que involucra la integración de múltiples factores. Técnicas estadísticas del análisis multivariado y técnicas no parámetricas[1], entre las que destacan las redes neuronales, aprendizaje de maquinas, teoría de conjuntos borrosos y conjuntos de frontera imprecisa, igualmente involucran la integración de múltiples factores para propósitos de toma de decisiones. Sin embargo, la característica distintiva de MCDA es su orientación hacia el soporte a la decisión, en lugar de emplear sólo el desarrollo del modelo para la toma de decisiones. En este sentido, los enfoques desarrollados en MCDA están centrados en aspectos de desarrollo de modelos que están directamente relacionados a la modelación y representación de las preferencias, valores y juicios del tomador de decisiones.

Sobre un conjunto de alternativas de decisión y con base a sus preferencias, un DM puede hacer: una *descripción*, una *selección*, una *clasificación* (*sorting*) ó un *ordenamient*o (*ranking*) de las alternativas (Roy, 1985). En el primero de ellos, el tomador de decisiones realiza una descripción de las mismas utilizando un lenguaje apropiado, de las acciones y de sus consecuencias. Por su parte, en el problema de selección, se elige un número restringido de alternativas potenciales más interesantes, tan pequeño como sea posible, lo cual justifica eliminar al resto. Por otro lado, en el problema de sorting, se asigna cada una de las alternativas a una familia de categorías definidas previamente; donde estas categorías, por lo general, están ordenadas jerárquicamente. Por último, en el problema de ordenamiento, el tomador de decisiones puede hacer un ranking de las alternativas de la mejor a la peor, con la posibilidad de empates e incomparabilidades entre ellas (Doumpos, y Zopounidis (2004); Figueira et al. (2010)).

[1] Técnica estadística que no presupone ninguna distribución de probabilidad teórica de la distribución de los datos y en su mayoría se basa en el ordenamiento de los datos.

De manera particular, el problema de ranking se presenta en términos del ordenamiento de un conjunto de acciones o alternativas, es decir, de dirigir la investigación hacia la determinación de un orden definido sobre un subconjunto de dicho conjunto de alternativas, con el fin de ser capaz de determinar las acciones que podrían ser consideradas como "suficientemente satisfactorias" basado en un modelo de preferencias, mientras se tiene en cuenta que el conjunto de alternativas podría evolucionar. El ranking proporciona en sí mismo una recomendación para el tomador de decisiones en forma de un orden parcial o completo formado por clases que contienen alternativas consideradas equivalentes entre sí (Roy, 1996).

El concepto de ordenamiento, es una generalización que los tomadores de decisiones perciben como una jerarquía de un conjunto de alternativas en orden decreciente de preferencias, la intuición del DM es difícil de capturar por medio de criterios objetivos individuales. La Figura 1.1, ilustra lo anterior en las diferentes estructuras de rankings, las cuales pueden ser: un orden completo ó un preorden completo o un preorden parcial. Mientras cada una de esas estructuras pueden plantear problemas para criterios de ordenamientos específicos, la estructura de ranking principal puede ser percibida fácilmente por los tomadores de decisiones (Leyva et. al, 2013a). Para mayor El Apéndice A muestra información sobre las relaciones de equivalencia y relaciones de orden de conjuntos.

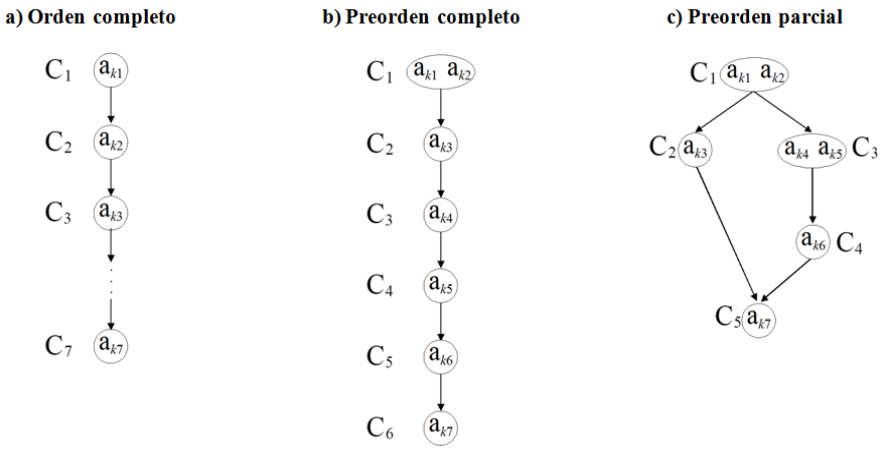


Figura 1.1. Diferentes estructuras de ordenamiento.
Notas: C_j representa una clase que agrupa alternativas a_{km} indiferentes; $\forall a_k \in A = \{a_{k1}..,a_{km}\}; j \leq m$
Fuente: Leyva et. al (2013a).

El problema de ordenamiento es familiar en el área de Investigación Operaciones y en Economía. Dentro del planteamiento del mismo, los elementos son ordenados sobre la base del resultado de sus comparaciones. Es decir, la evaluación de los mismos, es *relativa*: los elementos pertenecientes en la parte superior del ranking son juzgadas mejores que el resto, pero nada garantiza que ellas son "satisfactorias". Regularmente, en un problema de ranking se desea ordenar el conjunto de elementos de la mejor a la peor. Es importante tener en cuenta que la definición de la declaración del problema de ranking no impide que la posición relativa de dos alternativas a y b depende de su comparación con otras alternativas, por ejemplo, c. (Bouyssou et. al (2006).

En MCDA, diversos investigadores han estado interesados en el problema de sorting multicriterio, es decir, en asignar alternativas a clases ordenadas definidas "a priori"; sin embargo, es poca la atención prestada para definir esas clases (Baroudi y Safia, 2010; Nemery de Bellevaux, 2006). Por otro lado, en estadística y ciencias de la computación se pueden encontrar propuestas (Cormode y McGregor, (2008); Ferligoj, (1997); Hartigan, (1972)), direccionadas al problema de agrupar objetos "similares" en grupos (clusters) homogéneos no definidos "a priori", donde el objetivo es obtenerlos con la información contenida en dichos objetos. Este problema, es conocido como el problema de agrupamiento o clustering, que al no tener incorporadas las preferencias de un tomador de decisiones es denominado aquí como clustering clásico.

El análisis de agrupamiento clásico es una técnica estadística que se puede aplicar a datos que exhiben agrupaciones naturales. Dicha técnica, no hace diferencia entre variables dependientes e independientes, por lo que se examina de manera completa al conjunto de relaciones interdependientes y se hacen clasificaciones a través de los datos en bruto, utilizando una medida de similitud entre los elementos del conjunto, tales como los coeficientes de correlación, las medidas de distancia o los coeficientes de asociación (Venkatesan, 2007).

Una variante importante del problema del clustering, es aquel que surge cuando una vez creados los clusters se desea un ordenamiento de los mismos. Este es el caso del llamado problema de clustering ordenado (Cailloux et al., 2007). Diferentes propuestas han sido desarrolladas utilizando enfoques del clustering clásico para abordar el problema de clustering en

el ámbito del análisis multicriterio para la toma de decisiones, sea éste ordenado o no ((Baroudi y Safia (2010); (De Smet y Montano (2004); De Smet y Eppe (2009); De Smet et. al (2012); Handl y Knowles (2005); Nemery, (2006); Rocha et. al (2012); Rocha y Dias (2013)).

El denominado problema de clustering multicriterio ordenado está relacionado con el problema de ranking multicriterio (Nemery, 2006); pues en él existen conjuntos de alternativas indiferentes entre sí que conforman los grupos ordenados. Una forma de obtener dichos grupos ordenados, consiste en obtener primeramente un ranking de las alternativas y posteriormente agruparlas respecto a su posición (De Smet et al., (2012); Nemery (2006)). Otra manera es, inicialmente conformar los grupos de alternativas y después, establecer de alguna manera un ranking de dichos grupos como se presenta en Fernández *et*. al (2010). Ambos métodos para la obtención de los grupos ordenados de alternativas, son mostrados en la Figura 1.2.

Por lo anterior, en este trabajo se considera que el denominado problema de clustering multicriterio ordenado es en realidad un problema de ranking. Por ello, se considera que puede ser abordado de manera similar a la propuesta presentada en Leyva y Aguilera (2005); donde a partir de un modelo de integración de preferencias valuado se obtiene un ordenamiento final de alternativas utilizando un Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo, con la diferencia, que en esta propuesta se obtendrá un orden parcial de clases de alternativas o visto de otra manera, un preorden parcial de alternativas, por ello este método es llamado MOEA-POSET.

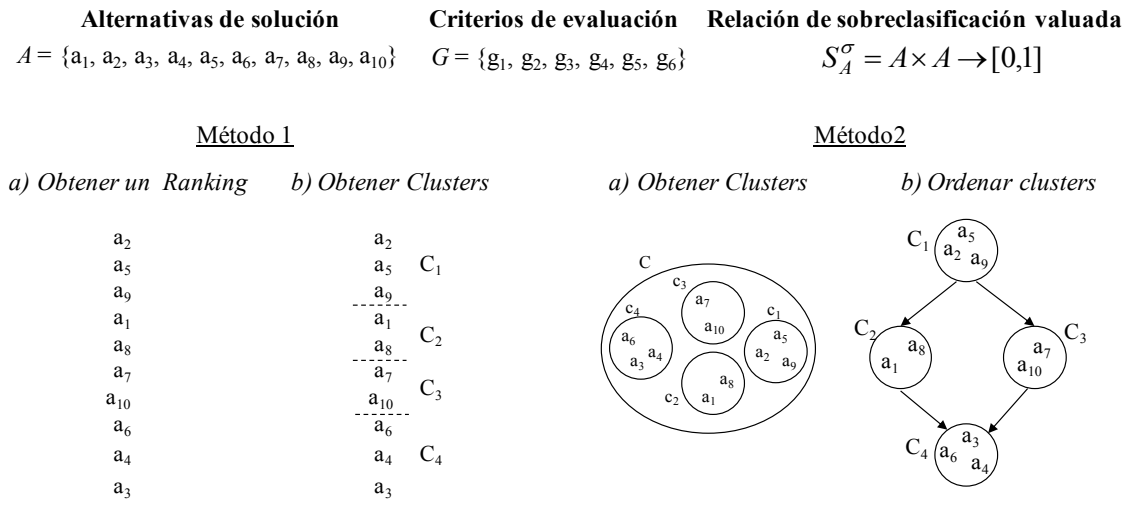


Figura 1.2. Ejemplos de métodos para obtener grupos ordenados de alternativas
Fuente: Elaboración propia.

Se reconoce que la causa principal de la complejidad de este problema, es que el conjunto de soluciones posibles crece de manera exponencial en la medida que se aumenta el número de alternativas y el número de clases. Por ello, este problema fue modelado como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo, donde el método de solución desarrollado basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos, descansa sobre la idea principal de reducir las diferencias entre el modelo global de preferencias y el ordenamiento final.

1.1.3. Problema de ordenamiento multicriterio en la empresa

Cotidianamente, dentro de la empresa, diversas decisiones involucran múltiples objetivos o criterios. Por ejemplo, un gerente de compras, puede estar buscando el proveedor que tiene el mejor servicio post-venta, el plazo de entrega más rápido, los precios más bajos y la mejor reputación por fiabilidad. Ese tipo de toma de decisiones intuitiva regularmente suele realizarse "sin ayuda", es decir, las personas se enfrentan decisiones como ésta sin el apoyo y la estructura aportada por los métodos de análisis de decisión (Goodwin y Wright, 2009). Para introducir a este problema en la empresa, considérese el problema de ordenamiento de clientes utilizando diferentes métodos:

Ordenamiento de clientes

El ordenamiento de clientes con base a su historial crediticio o sus preferencias de compra es una situación que pudiese estar presente diversas empresas. Para realizarlo, de manera inicial, es necesario buscar en los registros de la empresa aquellos clientes que convenientemente son de interés a la misma, esto con el objetivo de analizarlos y ordenarlos, para enfocarse posiblemente a los mejores clientes. El problema de ordenar los clientes con base a un conjunto de criterios es una tarea ardua, máxime si el número de clientes es de tamaño mediano[2] o grande y además, los criterios de evaluación tomados en consideración, incluyen criterios objetivos y subjetivos, algunos en conflicto entre sí.

Una empresa con la necesidad de conocer quiénes fueron sus clientes con mejor desempeño crediticio tomando en consideración múltiples criterios, podría utilizar algún método como la Suma Ponderada, obteniendo en un sólo número una evaluación global de cada cliente, y

[2] Considérese el tamaño mediano a un conjunto de entre 20 y 200 alternativas.

posteriormente ordenarlos con base a dicho número. Este método es frecuentemente utilizado por su sencillez una vez que se tienen los valores numéricos de los clientes en casa uno de los criterios y la importancia relativa de cada criterio; problema de este método es el hecho de ser compensatorio, es decir, un alto desempeño en uno o más criterios compensan o subsanan un bajo desempeño en otro u otros criterios. De igual manera, podría utilizarse el Método de Componentes Principales para clasificarlos mediante un ranking generado a partir de los componentes (criterios) principales que explican la variabilidad de los datos, sin embargo, se requiere que los criterios estén correlacionados y que sus valores estén normalizados; es decir, deben estar expresados en la misma unidad de medida, lo cual podría no estar presente en este problema de ejemplo. Las siguientes definiciones y situaciones están basadas en Goodwin y Wright (2009):

Una opción más que pudiese ser utilizado para ordenar los clientes, es el método Lexicográfico, que consiste en ordenar a los clientes tomando en consideración el criterio más importante del conjunto de criterios, dejando de lado el resto de los criterios. Una variante de este método es el Semi-lexicográfico, que ante la presencia de un empate entre dos o más clientes, se toma el valor del siguiente criterio en importancia como medio de desempate; continuando el proceso hasta terminar de ordenar el conjunto de clientes. Sin embargo, dada una situación como la siguiente:

Cliente	**Compras totales (Maximizar)**	**Morosidad (Minimizar)**
A	$29,000.00	Alta
B	$28,500.00	Baja
C	$28,800.00	Media

Utilizado el método Lexicográfico, si se toma en consideración las Compras totales como el criterio más importante, el ordenamiento sería:

1. *A*
2. *C*
3. *B*

Por otro lado, si se utiliza el Semi-lexicográfico, manteniendo la importancia del criterio Compras totales como el más importante y además, si la diferencia entre dos Compras totales es

menor a $400.00 pesos, entonces se elige el cliente que tiene menor Morosidad, en caso contrario se elige el de mayor compra total. Podría asumirse que como A es preferido a B y que B es preferido a C, por tanto, A es preferido a C. Sin embargo, al comparar directamente al cliente A con el C, este último es preferido al cliente A. Esto viola el axioma de transitividad del análisis de decisión que establece que si A es preferido a B y B es preferido a C, entonces A debería ser preferido a C.

Estos y otros métodos, como ELECTRE-III (Roy, 1990) con su método de destilación o PROMETHEE II (Brans et. al, 1986) con su Regla de Flujo Neto, pueden ser utilizados para realizar el ordenamiento de estos clientes, pues integran las preferencias del tomador de decisiones, sin embargo, estos métodos tienen algunos inconvenientes que posteriormente serán mencionados. La utilización de métodos que no integran dichas preferencias, los resultados podrían ser matemáticamente aceptables pero no del interés del tomador de decisiones.

En este trabajo se considera que es deseable tener un ranking final en orden decreciente de preferencias del tomador de decisiones sobre el conjunto de criterios tomados en consideración. Por tanto, el objetivo del presente trabajo es desarrollar un método basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos para, de primera instancia, dividir un conjunto de tamaño mediano de alternativas en clases y además, basándose únicamente en información proporcionada en la modelación del problema, obtener la relación de sobreclasificación crisp[3] entre las clases determinadas, para abordar problemas de ordenamiento multicriterio tanto en el área de las ciencias administrativas, como en otras áreas del conocimiento donde se consideren las preferencias de un tomador de decisiones.

Con este método, el tomador de decisiones tendrá una herramienta para generar ordenamientos de conjuntos de alternativas de tamaño mediano acorde a sus preferencias. Esto coadyuvará a que las decisiones sobre un problema de decisión en particular, puedan partir de un método que presenta soluciones óptimas al problema y/o suficientemente aceptables a sus preferencias.

[3] Relación que representa la presencia o ausencia de asociación, interacción, interconexión, vinculación o incidencia entre los elementos de dos conjuntos.

1.2. Planteamiento del problema

A continuación se delinea el problema de investigación del presente trabajo de tesis, presentando una descripción del problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano.

Para obtener ordenamientos de clases, consistentes con las preferencias del tomador de decisiones, es necesario contar con un método flexible, que permita hacer una modelación adecuada de dichas preferencias, sin ello, se podrían generar conjuntos de soluciones que si bien podrían ser buenas, no satisfacen el o los criterios del DM, repercutiendo en el proceso de decisión. Una vez realizada la modelación de las preferencias del decisor, respecto a los criterios que evaluarán a las alternativas, se requiere tener un método que permita obtener ordenamientos con las menores inconsistencias posibles, con respecto a dichas preferencias.

Por lo anterior, el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano donde existen alternativas indiferentes entre sí, es planteado de la siguiente manera:

Considérese un conjunto finito de alternativas potenciales $A = \{a_1, a_2, .., a_m\}$ consideradas por un tomador de decisiones y evaluadas por múltiples criterios $G = \{g_1, g_2, .., g_n\}$, algunos de ellos en conflictos entre sí. Considérese además, una relación binaria valuada S_A^σ que integra las preferencias del DM sobre los múltiples criterios que describen al conjunto de alternativas. El problema es:

Según la apreciación de las alternativas contenidas en la relación binaria valuada S_A^σ, obtener una partición del conjunto de alternativas A que contiene un conjunto de clases de dichas alternativas $P_k(A) = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ y, una relación de sobreclasificación crisp antisimétrica $S^*_{P_k(A)}$ sobre esa partición a partir de la explotación de S_A^σ, de tal forma que la partición refleje el mejor compromiso entre los objetivos en conflicto "discriminar las diferentes alternativas", pero al mismo tiempo, "agrupar las alternativas indiferentes" y además, basándose únicamente en

información en $S^*_{P_k(A)}$, generar un orden parcial de clases de alternativas o visto de otra manera, un preorden parcial de alternativas.

1.2.1. Escenarios futuros

Hay una necesidad creciente de modelar la integración de preferencias con enfoques flexibles en métodos de toma de decisiones para problemas complejos de decisión, en contraparte a la oferta del enfoque normativo o prescriptivo del análisis multicriterio de la toma de decisiones. Uno de los enfoques que ha tenido éxito en el tratamiento de este tipo de problemas es el enfoque de sobreclasificación (outranking) basados en relaciones binarias firmes (crisp) o valuadas[4] (fuzzy). Las clásicas propuestas metodológicas de este enfoque constructivo como ELECTRE (Roy,1968) y PROMETHEE (Brans y Vincke, 1985), han logrado sobrevivir gracias a que incorporan en su etapa de modelación de preferencias la heurística ampliamente aceptada de las reglas de mayoría, robustecida en el primero de ellos, al combinar la participación de las minorías significativas; sin embargo, no deja de inquietar la falta de una propuesta metodológica en la literatura actual, que logre explotar el modelo de integración de preferencias de manera eficiente y permita realizar una recomendación al tomador de decisiones en forma ranking de un conjunto de alternativas de tamaño mediano de manera veraz y consistente.

La mayoría de los métodos de ranking existentes que explotan una relación de sobreclasificación valuadas intentan, explícitamente o de otra manera, optimiza un solo criterio explicándose con ello, las discrepancias fundamentales observables entre las recomendaciones producidas por diferentes algoritmos en los mismos datos, que origina que un método de ordenamiento falle en un contexto donde el criterio utilizado para realizar el ranking es inapropiado. Además, esos algoritmos de rankings fueron diseñados para capturar la noción de tomador de decisiones sobre un ranking, sin embargo, con el incremento de la complejidad de algunos problemas de decisión, estos algoritmos de ranking tradicionales algunas veces no tienen buen desempeño cuando hay conjuntos de alternativas de tamaño mediano ó cuando hay demasiada intransitividad o incomparabilidad entre pares de alternativas (Leyva et. al, 2013a).

[4] Relación donde los grados de asociación entre los elementos de dos conjuntos pueden ser representados mediante grados de pertenencia.

Por lo tanto, de no enfocarse al desarrollo de métodos de ordenamiento multicriterio para conjuntos de alternativas de tamaño mediano, diversos problemas de las ciencias administrativas y otras áreas del conocimiento no podrían ser abordados adecuadamente con este enfoque multicriterio, debido a la cantidad de alternativas presentes.

En razón a lo anterior, en este trabajo de tesis se propuso un método basado en algoritmos evolutivos que permite ayudar a resolver instancias del problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano. El problema es abordado como un problema de optimización combinatoria multiobjetivo, donde las características sobresalientes que lo describen son las penalizaciones que realiza cuando las alternativas de decisión no están bien ubicadas al interior de cada clase y, las penalizaciones por no estar bien ubicadas las alternativas de acuerdo al exterior de las clases, ambos casos con respecto a las preferencias del decisor.

1.2.2. Alternativas de solución

Este trabajo es una extensión al problema presentado en Leyva y Aguilera (2005), donde la recomendación en lugar de ser un orden total de alternativas para un conjunto de tamaño pequeño, ahora se busca que sea un preorden parcial de alternativas para un conjunto de tamaño mediano. Esta extensión es también abordada como un problema de optimización multiobjetivo utilizando un enfoque evolutivo. Aquí se consideran objetivos para que, además de que en el ranking en la medida de lo posible cada una de las clases contenga alternativas indiferentes entre sí, dicho ranking sea consistente al modelo de integración de preferencias del decisor, expresado a través de una relación de sobreclasificación valuada proporcionada previamente. Dicha relación de sobreclasificación valuada pudo haber sido construida con un método de sobreclasificación como ELECTRE-III o PROMETHEE II.

De acuerdo con Ferligoj (1997) el problema de agrupar elementos, en el caso particular crear clases de alternativas, se puede abordar de las siguientes maneras:

- Reduciéndolo a un problema de agrupamiento con un solo criterio obtenido como una combinación de los criterios propuestos.

- Utilizando algoritmos de agrupamiento restringidos donde un criterio seleccionado es considerado como el criterio de agrupamiento y los otros determinan las restricciones.

- Mediante el consenso de técnicas de agrupamiento sobre los agrupamientos generados por un algoritmo mono-criterio para cada criterio.

- Mediante el uso (o creación) de algoritmos directos[5].

Se parte de la idea de que la manera de explotar una relación de sobreclasificación valuada para construir un ranking multicriterio como el propuesto por Fernández y Leyva (2004), puede ser utilizada para construir las clases ordenadas utilizando un Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo (MOEA por sus siglas en inglés) similar al propuesto por Leyva y Aguilera (2005). El problema es concebido aquí, como el interés de una persona o grupo de personas por obtener clases ordenadas de un conjunto finito de alternativas sobre la base de una relación de sobreclasificación valuada.

1.2.3. Formulación del problema

1.2.3.1. Interrogante central

En esta investigación sobre ranking multicriterio, se responderá la siguiente interrogante central: ¿Cómo se puede abordar el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, de tal manera que las recomendaciones sean más consistentes a las preferencias del tomador de decisiones, que las que presentan técnicas de ordenamiento multicriterio clásicas?

1.2.4. Sistematización del problema de investigación

1.2.4.1. Preguntas de investigación

A continuación, se presentan las preguntas de investigación que se desprenden de la interrogante central y que, a partir de responder cada una de ellas, se contesta dicha interrogante:

[5] Conocidos también como exactos ó deterministicos.

- ¿Cómo se puede formular el problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo?

- ¿Cuáles son los elementos teóricos-metodológicos, que permiten crear un método para el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, basado en algoritmos evolutivos multiobjetivo, que incorpore enfoques flexibles de modelación de preferencias?

- ¿Cómo es posible diseñar y desarrollar un método, para resolver el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, que sea flexible y sensible al momento de integrar las preferencias del tomador de decisiones?

- ¿Cómo será el desempeño de un método basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos para resolver problemas de ranking multicriterio de conjuntos de alternativas de tamaño mediano, que incorpore enfoques flexibles de modelación de preferencias con menos inconsistencias respecto a otros métodos de ordenamiento multicriterio clásicos?

1.3. Delimitación del problema

El trabajo está delimitado en el problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano. Se considera que esta dada una relación de sobreclasificación valuada, generada con algún método como ELECTRE o PROMETHEE. Sin embargo, hay una amplia área de oportunidad para el desarrollo de nuevas técnicas que presenten soluciones de mejor consistencia con respecto a las preferencias de los tomadores de decisiones y que exploten conjuntos de alternativas de decisión de tamaño mediano.

1.4. Objetivos

En este apartado, se plantean los fines que se definieron al inicio de la investigación, a partir de las preguntas planteadas con anterioridad. Para ello, se definió un objetivo general y cuatro específicos.

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar un método basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos para abordar el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, que incorpore enfoques flexibles de modelación de preferencias, con el fin de apoyar la decisión de los tomadores de decisiones, a partir de soluciones más consistentes que las que presentan métodos de ordenamiento multicriterio clásicos.

1.4.2. Objetivos específicos

- Formular el problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo.

- Identificar y analizar los elementos teóricos-metodológicos, que permiten crear un método basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos para el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, que incorpore enfoques flexibles de modelación de preferencias.

- Diseñar y desarrollar un método para resolver instancias del problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, que sea flexible y sensible al momento de integrar las preferencias del tomador de decisiones y que permita generar soluciones lo más consistente posible a sus preferencias.

- Evaluar el desempeño del método basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos desarrollado para resolver problemas de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, que incorpora enfoques flexibles de modelación de preferencias y genera soluciones con menos inconsistencias respecto a otros métodos de ordenamiento multicriterio clásicos.

1.5. Justificación

Considerando que el problema de ordenamiento de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, puede ser abordado creando primeramente una partición de dicho conjunto y posteriormente, deduciendo la relación entre las clases generadas con tal partición, es preciso señalar que el número de formas en las que un conjunto de elementos o alternativas[6] A puede ser particionado, es de carácter exponencial y donde dicha cantidad puede ser obtenida a través del número de Bell (Sloan, 2014a). Debido a que el problema a resolver se refiere a un ranking, se debe considerar que para cada partición ordenada, existe la posibilidad que algunas alternativas sean indiferentes entre sí, formando con ello un preorden total o completo de alternativas (orden total de conjuntos de alternativas) y que para obtener el total de particiones ordenadas se pueden utilizar los números de Fubini (Sloan, 2014b). En este trabajo de investigación, fueron de interés los preordenes parciales de alternativas (clases o conjuntos parcialmente ordenados, conocidos como POSET[7]), porque esas estructuras de ordenamiento pueden mantener conjuntos de alternativas incomparables con otros conjuntos. Sin embargo, los POSETs son igualmente de carácter exponencial como los anteriores, pero con un crecimiento mayor.

Debido a la complejidad y el tiempo necesario para generar esas estructuras de rankings, el número de formas conocidas hasta el momento es para conjuntos de 18 elementos (véase a Brinkmann y McKay (2002) y Sloan (2014c)). Hace 12 años, Brinkmann y McKay (2002), utilizando computación paralela sobre un cluster de computadoras, generaron POSETs no isomórficos[8] de hasta 16 elementos, así como POSETs y topologías etiquetadas de hasta 18 elementos. Además, calcularon que el tiempo estimado para obtener esas estructuras, utilizando un equipo de cómputo Pentium III de un 1GHz era de 30 años. Aún después esos 12 años, Badinger y Reuter (2014), coinciden que el cálculo de los POSETs puede ser complejo computacionalmente (ó simplemente infactible), pues con más de 25 elementos, incluso hoy en día el tiempo de ejecución supera cualquier número factible. Los números de formas de asignar un conjunto de elementos en particiones, conjuntos totalmente ordenados y conjuntos parcialmente ordenados son mostrados en la Tabla 1.1.

---

[6] En este apartado considérese la palabra alternativa equivalente a la palabra elemento.
[7] Acrónimo del idioma inglés: Partially Ordered Set.
[8] Dos ordenamientos son isomórficos si tienen la misma estructura.

Tabla 1.1. Número de formas para crear particiones, ordenes totales y preordenes totales con *n* elementos

n	Particiones Bell(n)	Ordenes totales Fubini(n)	Conjuntos parcialmente ordenados POSET(n)
1	1	1	1
2	2	3	3
3	5	13	19
4	15	75	219
5	52	541	4231
6	203	4683	130023
7	877	47293	6129859
8	4140	545835	431723379
9	21147	7087261	44511042511
10	115975	102247563	6611065248783
11	678570	1622632573	1396281677105899
12	4213597	28091567595	414864951055853499
13	27644437	526858348381	171850728381587059351
14	190899322	10641342970443	98484324257128207032183
15	1382958545	230283190977853	77567171020440688353049939
16	10480142147	5315654681981355	83480529785490157813844256579
17	82864869804	130370767029135901	122152541250295322862941281269151
18	682076806159	3385534663256845323	2419393925972011766028978201480850 23

Fuente: Elaboración propia basada en Sloan (2014a, 2014b, 2014c)

Por tanto, resulta infactible la utilización de algoritmos directos para generar y evaluar todas las estructuras de ranking, para obtener la(s) solución(es) óptima(s); sobre todo, cuando el número de elementos a ordenar es mayor a 18.

Lo anterior, evidencia la complejidad que en sí mismo tiene el problema de ordenamiento. Pero además de esa complejidad, es posible que la solución o conjunto de soluciones obtenidas con algún método, aún cuando sean matemáticamente factibles, éstas no sean de interés o no están acorde a las preferencias de un tomador de decisiones. Por ello, para lidiar con la inclusión de las preferencias de los tomadores de decisiones en problemas de ranking, se han desarrollado métodos como los mencionados en el apartado 1.1.3 y otros más.

Algunos de esos métodos, como ELECTRE-III y PROMETHEE II, construyen y explotan una relación de sobreclasificación valuada para construir un ranking, mediante el uso de una función de anotación (score). Sin embargo, este tipo de funciones pueden conducir a ordenamientos con

efectos de inversión (rank reversal), entre pares de alternativas (Mareschal, De smet y Nemery, 2008). Al respecto, Leyva y Aguilera (2005), consideran que ambos métodos de ranking no tienen un buen desempeño en presencia de alternativas irrelevantes o en la presencia de grafos con muchos circuitos, ya que no cuentan con mecanismos para lidiar con este tipo de problemas. Por otra parte, Leyva y Araoz (2013), mostraron que la *Regla de Flujo Neto* que tiene integrada el método PROMETHEE para deducir rankings, presenta problemas ante el incremento del número de alternativas.

Además, en la revisión de la literatura se encontró que son pocos los trabajos que han sido presentados del problema del clustering multicriterio ordenado y por ende, del problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, donde hay conjuntos de alternativas indiferentes entre sí. Los métodos encontrados incluyen desde la utilización de enfoques clásicos de agrupamiento combinados con elementos del MCDA, hasta la utilización de enfoques de agrupamiento que prescinden de las características de los enfoques clásicos.

La importancia de este trabajo radicó en la creación de una alternativa de tratamiento para el problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, donde hay conjuntos de alternativas indiferentes entre sí, el cual presenta soluciones más consistentes con respecto al modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones, que las que ofrecen actualmente enfoques de ranking clásicos como ELECTRE-III. La alternativa desarrollada, está basada en un algoritmo evolutivo multiobjetivo que explora el espacio de soluciones de forma aleatoria, permitiendo la evaluación de conjuntos de hasta 150 alternativas.

1.6. Hipótesis

A continuación, se presentan la hipótesis general y las específicas de esta investigación:

1.6.1. Hipótesis general

- El abordaje del problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano donde hay conjuntos de alternativas indiferentes entre sí como un problema de optimización multiobjetivo, aplicando algoritmos evolutivos multiobjetivos

para su solución, permite presentar al tomador de decisiones recomendaciones más consistentes a las que presentan métodos de ordenamiento multicriterio clásicos.

1.6.2. Hipótesis específicas

- El problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano donde hay conjuntos de alternativas indiferentes entre sí, puede ser formulado como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo.

- La resolución del problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, utilizando un enfoque metaheurístico basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos, permite presentar soluciones más consistentes que con métodos de ordenamiento multicriterio clásicos.

1.7. Limitaciones del estudio

Las limitaciones del presente trabajo de tesis fueron referentes a los datos utilizados para la validación del método evolutivo multiobjetivo propuesto. Se utilizaron problemas resueltos en la literatura, problemas simulados por computadora y un estudio de caso con datos reales. Para los problemas simulados se requirió crear dos algoritmos para generar instancias de problemas de conjuntos de alternativas de tamaño mediano, así como dos algoritmos con métricas integradas para evaluar los resultados del MOEA-POSET.

La realización del estudio de caso, se tuvo que llevar a cabo una vez que el algoritmo evidenció buenos resultados técnicos. Fue natural tener esta limitación, toda vez que no era conveniente tener un acercamiento con una empresa o institución sin tener ajustado el método propuesto.

Además, debido a que los tomadores de decisiones forman parte del problema de decisión, en este trabajo se realizó un convenio de cooperación con una empresa que otorga crédito a productores agrícolas en la región norte del estado de Sinaloa. Esto con el objetivo de validar empíricamente el método de ordenamiento multicriterio desarrollado y mostrar la manera en las que esté método puede apoyar a los tomadores de decisiones frente a este tipo de problemas.

Capítulo 2 Marco teórico, conceptual y referencial

2.1. Introducción

El proceso de toma de decisiones en el ámbito administrativo ha sufrido cambios a través de los años. Desde el principio, los administradores tomaban las decisiones basándose en un alto grado de intuición y adivinanza. Por ello, Frederick W. Taylor propuso el análisis científico en lugar de la intuición o de experiencias anteriores. El uso de este análisis científico se ha incrementado a través del tiempo, pues los administradores cada vez más utilizan técnicas y herramientas para la resolución de problemas de decisión en lugar la intuición (Claude, 2005). En ese sentido, Gaaving y Roberto (2011), afirman que la mayoría de los líderes actualmente toman las decisiones con base a la experiencia, la intuición, la investigación, o las tres. Con relación a la uso de la intuición versus las formulas en la toma de decisiones, Kahneman (2011) considera que para maximizar el acierto en las predicciones en problemas donde está presente la incertidumbre e impredecibilidad, las decisiones finales deben confiarse a las formulas, especialmente en entornos de baja validez. Por ejemplo, en un proceso de admisión en una Universidad donde los entrevistadores son los que toman las decisiones finales de admitir a un candidato, estos darán más importancia a sus impresiones personales y menos a otras fuentes de información que reducen su validez, debido a que confían demasiado en sus intuiciones.

La toma de decisiones es preferible que sea llevada a cabo dentro de un marco racional. En la teoría de la decisión, el concepto de racionalidad es parte medular de muchas disciplinas, desde la economía hasta la ciencia política, desde la filosofía a la psicología, y de la gestión de la ciencia hasta sociología. Dicho concepto tiene diferentes connotaciones como lo es “inteligencia”, “cordura”, “lógica”, etc. (Bermúdez, 2009). March (1994), define a la racionalidad como una clase de procedimientos particular y muy familiar de toma de decisiones, y en ese sentido, un procedimiento racional puede o no conducir a buenos resultados. Considera que los frameworks o marcos racionales están dentro de las teorías del comportamiento humano y pueden ser utilizados para entender las acciones que se realizan en las empresas, debido a que están implícitos en muchas teorías de negociación, intercambio y votación. Los procesos de elección racional, de acuerdo con March (1994), son los fundamentos de los modelos microeconómicos en la asignación de recursos, de las teorías políticas de la formación de coaliciones, teorías de decisiones estadística, y muchas teorías y modelos dentro las ciencias sociales.

De igual manera, March (1994), sostiene que algunas versiones de la teoría de la elección racional suponen que todos los tomadores de decisiones tienen una serie de preferencias en común, que las alternativas y sus consecuencias se definen por el medio ambiente y que los tomadores de decisiones tienen un conocimiento perfecto de las alternativas y sus consecuencias. Otras versiones reconocen una mayor subjetividad inter-actor, sin embargo, presuponen un conocimiento perfecto para cualquier particular, donde: las alternativas, las consecuencias de todas las alternativas y las preferencias relevantes para la elección son conocidas, precisas y consistentes y estables. No obstante, las versiones puras de la elección racional son difíciles de aceptar como retratos reales y creíbles por los actores individuales u organizacionales. Los estudios de la toma de decisiones en el mundo real, sugieren que no todas las alternativas son conocidas, que no todas las consecuencias se consideran y que no todas las preferencias se piensan al mismo tiempo. En lugar de considerar todas las alternativas, los tomadores de decisiones al parecer suelen considerar sólo a unas pocas en forma secuencial y no simultánea. Además, no toman en cuenta todas las consecuencias de sus alternativas, es decir, se centran en algunas e ignoran otras.

2.2. Apoyo a la toma de decisiones con múltiples criterios

2.2.1. Preámbulo

Con el advenimiento de la computadora, los administradores han podido procesar una mayor cantidad de datos, permitiéndoles contar con mayor información para la toma de decisiones. De manera general, entre los métodos que los tomadores de decisiones utilizan en el proceso decisorio están la programación lineal, la programación dinámica, los modelos de transporte, los modelos de teoría de las colas (Claude, 2005). Sobre la programación lineal y la programación dinámica, Simon (1959), considera que dichas técnicas matemáticas son utilizadas para construir procesos de decisión formales. En ese sentido, Zopounidis y Pardalos (2010), afirman que durante las últimas décadas, la investigación de operaciones ha recorrido un largo camino como un campo que le da apoyo a la administración científica, dentro de la cual, existen diversas áreas interconectadas que han sido desarrolladas con base a diferentes paradigmas de toma de decisión y contextos del problema. Argumentan que la investigación de operaciones, es utilizada porque

está principalmente relacionada con la construcción de modelos y procedimientos de optimización algorítmica, que facilitan el análisis de problemas complejos del mundo real.

El continuo avance en los campos del conocimiento como la investigación de operaciones, la inteligencia artificial y la ciencia de la computación, ha conducido a científicos e investigadores a utilizar las nuevas capacidades, al desarrollar técnicas para ayudar a los tomadores de decisiones a resolver problemas complejos de decisión. Entre estas herramientas están los conjuntos de frontera imprecisa, la computación evolutiva, los conjuntos borrosos y el apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios como coinciden Figueira, Greco y Ehrgott (2005) y Roy (2010). Los importantes avances del apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios alcanzados en los últimos cuarenta años, constituyen un poderoso enfoque metodológico no paramétrico alternativo para el estudio de los problemas de decisión multidimensionales.

El apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios es un campo de la investigación de operaciones que ha venido progresando a partir de su aplicación en problemas donde otros enfoques o métodos no pueden ser utilizados. Lo anterior, se debe a que los problemas de decisión complejos del mundo real no logran ser resueltos sobre la base de enfoques unidimensionales (Doumpos, y Zopounidis, 2004; Zopounidis y Doumpos, 2000). Desde su concepción, las metodologías multicriterio para la toma de decisiones, han sido utilizadas ampliamente para ayudar en problemas de decisión reales, que van desde la agricultura hasta el medio ambiente y la gestión del agua; desde las finanzas a la selección de los proyectos; desde la contratación de personal hasta el transporte; entre otros (Figueira et al., 2010). En este contexto, el rigor teórico y la solidez de dichas metodologías, así como sus ventajas con respecto a las metodologías tradicionales están bien documentados (Bouyssou et al, 2000; Figueira et al, 2005; Klir y Yuan, 1995).

El objetivo del apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios es ayudar a los tomadores de decisiones para hacer frente a problemas donde está implícita la agregación de múltiples criterios, sobre todo cuando existen objetivos contradictorios, lo cual a menudo es una tarea compleja. Una de sus principales características es la orientación de apoyo a la decisión en lugar de sólo el desarrollo de modelos de decisión. Se centra en los aspectos de desarrollo de

modelos y representación de las preferencias de los tomadores de decisiones y juicios de valor; pues uno de los pasos más importantes en el análisis de decisiones es estructurar problemas de decisión en un formato formal y manejable (Brugha, 2004).

2.2.2. Antecedentes

El incremento de la complejidad del ambiente económico, tecnológico y de negocios, ha contribuido al establecimiento del análisis multicriterio para la toma de decisiones[9] como un campo importante de la investigación de operaciones y la ciencia de la administración (Zopounidis y Pardalos, 2010); cuya historia con base a Pardalos, Siskos y Zopounidis (1995), inicia con el trabajo de Vilfredo Pareto en 1896, donde se examina el problema de la agregación de criterios en un simple criterio. Además, se define el concepto de eficiencia entre dos alternativas de decisión. Por otro lado, Zopounidis y Pardalos (2010), coinciden que la historia se puede remontar a los trabajos de Jean-Charles de Borda y Marquis de Condorcet sobre los sistemas de voto a finales del siglo XVIII y que alrededor de un siglo después, Pareto introdujo el concepto de dominancia, que es fundamental en la teoría del análisis multicriterio para la toma de decisiones; mismo que fue extendido posteriormente por Koopmans (1951). Durante los años 1940 y 1950, von Neumann y Morgenstern (1944) así como Savage (1954), introdujeron la teoría de utilidad para la toma de decisiones normativa; la cual sentó las bases para la teoría de utilidad/valor multiatributo, una de las principales corrientes del análisis multicriterio para la toma de decisiones. Esos trabajos pioneros, inspiraron a muchos investigadores durante los años 1960. Charnes y Cooper (1961) extendieron la teoría de programación matemática tradicional a través de la teoría de programación por metas. A finales de los años 1960, el análisis multicriterio para la toma de decisiones atrajo el interés de la investigación de operaciones Europea. Roy (1968), uno de los pioneros en este campo, introdujo el enfoque de relación de sobreclasificación y es considerado como el fundador de la escuela "Europea" o "Francesa" del análisis multicriterio para la toma de decisiones.

Por otro lado, para Köksalan, Wallenius y Zionts (2013), la raíz del análisis de la teoría de la decisión/teoría de la utilidad proviene desde el modelo de la utilidad esperada subjetiva a

[9] Conocida como Apoyo a la Decisión Multicriterio en la escuela Europea o Francesa; y como Toma de Decisiones Multicriterio en la escuela Americana.

principios de 1930s con Ramsey y De Finetti, el tratamiento formal de la utilidad por von Neumman y Morgenstern en los 1940s y el trabajo de contornos de indiferencia de Edgeworth en los 1880s y Samuelson en los 1940s. El trabajo de Howard Raiffa, Robert Schlainfer y Ron Howard en los años 1950 fue importante para el desarrollo del análisis de la decisión hasta nuestros días. Coinciden con Zopounidis y Pardalos (2010), sobre las aportaciones de Marquis de Condorcet y Jean-Charles de Borda con las teorías de voto, donde este último propuso un sistema de ordenamiento de candidatos mediante la asignación de puntos con base a sus ranks. Los trabajos de ambos, tienen una influencia considerable en los métodos de sobreclasificación desarrollada inicialmente por Roy en 1968 con el método ELECTRE. La contribución de Vilfredo Pareto sobre el concepto de eficiencia conocido como optimalidad de Pareto.

De igual manera, Francis Edgeworth desarrolló los fundamentos de la teoría de la utilidad, con la introducción de la noción de una curva de indiferencia y la caja de Edgeworth para representa varias distribuciones de recursos. Los conceptos de Pareto y Edgeworth son fundamentales en economía, ciencia de la negociación y la teoría moderna del análisis multicriterio para la toma de decisiones. Algunos de los fundamentos matemáticos utilizados en el análisis multicriterio para la toma de decisiones, son derivados de los trabajos de Georg Cantor (1845-1918), conocido como el creador de la teoría de conjuntos, hizo su contribución a la teoría del número, incluyendo los conceptos de categorías diferentes de infinidad. Así mismo, Paul Samuelson en 1938, presentó el concepto de preferencias reveladas y que posteriormente mostró como utilizarlo para construir un conjunto de curvas de indiferencia. El concepto de curvas reveladas tiene influencia en la teoría del comportamiento del consumidor.

Por su parte, Herbert Simon en 1955 desarrolló la teoría del comportamiento basada en el concepto de racionalidad limitada. Simon consideraba que los humanos no resuelven problemas maximizando la utilidad, sino satisfaciendo, es este caso, un conjunto de niveles de aspiración, los cuales, tienen impacto en técnicas modernas de análisis multicriterio para la toma de decisiones, como la programación por metas de Charnes y Cooper (1961). En 1951, Kenneth Arrow publicó su libro sobre elección social y valores individuales, el desarrollo de la teoría de elección social ha inspirado la investigación en el análisis multicriterio para la toma de

decisiones. En 1977, Thomas Satty publicó el Proceso Jerárquico Analítico conocido como AHP ampliamente utilizado en la escuela “Americana”.

2.3. El proceso de decisión

El concepto de proceso a la decisión se debe principalmente a Simon (1947); el cual corresponde a las actividades cognitivas de un tomador de decisiones ante una pregunta cuya respuesta no se da de manera automática. El uso del concepto de proceso de decisión dentro de la teoría de la decisión trajo consigo dos ideas principales: la noción de racionalidad y el de racionalidad limitada. El primero de ellos se refiere al proceso donde se espera que sea coherente (racional); el cual no necesariamente se puede considerar económicamente racional. Por otro lado, por racionalidad limitada se entiende que la racionalidad del tomador de decisiones está limitada en tiempo, espacio y conocimiento; además solamente es válida localmente (Tsoukias, 2007), en este escenario el tomador de decisiones no tiene información completa de todas las alternativas ni de sus consecuencias, ni conoce todas las preferencias relevantes para la elección (March, 1994).

En la literatura existen diferentes modelos sobre el proceso de toma de decisiones, algunos de ellos son extensiones de los propuestos por Dewey (1910), sobre el proceso de decisión de compra de los clientes, el cual consiste en cinco etapas ó, por Simon (1947) con su modelo de decisión de tres etapas o el de cuatro etapas de 1977. De acuerdo con Simon (1947), el proceso de decisión está compuesto por las siguientes 3 etapas: *Inteligencia*, *Diseño* y *Elección*.

La primera de ellas, consiste en identificar todas las posibles alternativas de solución al problema que se está abordando. Por su parte, en la segunda etapa se determinan todas las posibles consecuencias de dichas alternativas. En la tercera etapa, se evalúan todas las posibles consecuencias. Posteriormente, Simon (1977) agregó la fase de *Implantación*. La cual consiste en evaluar los resultados de las alternativas de solución, como parte de un ciclo repetitivo, mismo que conduce a nuevas decisiones. Simon, sugiere que cada fase sea considerada de tipo recursiva.

Para Tersine (2007), la decisión consiste en un proceso de análisis y selección de diversas alternativas disponibles y de las acciones de quien toma la decisión deberá seguir. Considera que

el proceso de decisión está compuesto por una serie de elementos, dentro los cuales están el tomador de decisiones, los objetivos, las preferencias, la estrategia, la situación y el resultado. El tomador de decisiones es el individuo o grupo de individuos que hace la selección de o las alternativas de disponibles. Por su parte, los objetivos son lo que se está buscando alcanzar con las acciones que se llevarán a cabo. Las preferencias corresponden a los criterios que el tomador de decisiones tomará en cuenta al momento de seleccionar las alternativas. Se entiende por estrategia, a la forma en que se llevarán a cabo las acciones para lograr los objetivos. En cambio, la situación corresponde al medio ambiente donde se toma la decisión y que podría afectar el proceso de decisión. Y por último, el resultado es o son las consecuencias derivadas de una estrategia.

El concepto de proceso de decisión ha sido asociado a los estudios organizacionales y más concretamente, al estudio de cómo las organizaciones y otros órganos colectivos se enfrentan a situaciones de decisión. Aunque la primera idea fue una simple extensión del modelo propuesto por Simon (inteligencia, diseño y elección), a un nivel organizacional, pronto pareció que tal enfoque no podría tomar en cuenta la complejidad de la toma de decisiones organizacional. El proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios es un tipo especial de proceso de decisión (Tsoukias, 2007).

En el apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios existen al menos dos actores en un espacio de interacción: el cliente (tomador de decisiones) y el analista; que realiza una construcción consensuada de una representación de un interés del tomador de decisiones. Dicha construcción se basa en el conocimiento metodológico y las habilidades técnicas del analista, así como el dominio del conocimiento del tomador de decisiones. Esto implica que los dos actores se involucran en un proceso de decisión, haciendo con ello del proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, un tipo especial de proceso de decisión.

La diferencia entre toma de decisión con múltiples criterios y apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios ha sido estudiado en Roy (1990, 1993) y otros más; aunque Roy los considera como dos enfoques diferentes y no como situaciones diferentes como lo presenta Tsoukias (2007). En un contexto de toma de decisiones con múltiples criterios, un

tomador de decisiones, teniendo un interés, podría utilizar una herramienta teórica de decisión con el fin de establecer las acciones posibles para llevarlas a cabo. En tal escenario la teoría de la decisión es directamente utilizada por el tomador de decisiones y, si hay un analista, su presencia se justifica ya sea con fines de tutoría o porque es un "clon" del tomador de decisiones. En ese sentido, teóricamente no hay diferencia entre estos dos actores. Cabe señalar que en este escenario se considera al tomador de decisiones como un ente que tiene poder de decisión y por lo tanto, es responsable de la decisión.

Por otro lado, en el contexto del apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, existen al menos dos actores distintos: el cliente y el analista, ambos jugando roles diferentes. Más actores pueden existir en tal ambiente y el cliente no necesariamente ser un tomador de decisiones (puede ser que no tenga poder de decisión y ser, por ejemplo, el propio analista para otro cliente). Por simplicidad, sólo se tendrá en cuenta el valor más simple con sólo estos dos actores presentes y utilizar indistintamente los conceptos de tomador de decisiones y el cliente.

El objetivo final del proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios (enfoque constructivo), es llegar a un consenso entre el cliente y el analista, donde el analista debe tratar de obtener un conjunto coherente estructurado de los resultados, con el fin de orientar la toma de decisiones y facilitar la comunicación de las decisiones. Para ello, el analista debe utilizar un enfoque que tiene como objetivo producir conocimiento a partir de las hipótesis de trabajo teniendo en cuenta los objetivos y los sistemas de valores del contexto de decisión involucrados. Este enfoque debe basarse en modelos que son, al menos parcialmente, construidos a través de la interacción con el tomador de decisiones. En primer lugar, la construcción se refiere a la forma en que las acciones estudiadas son tomadas en cuenta, así como las consecuencias en que estas acciones serán juzgadas. En segundo lugar, el proceso de construcción se refiere a la forma en que se diseñan ciertas características (en particular, los valores asignados a los diferentes parámetros) del modelo de preferencia que se consideró el más adecuado teniendo en cuenta las especificidades del contexto de decisión y las hipótesis de trabajo. En esta concepción, ya no es necesario suponer que existe, en la mente de quien toma la decisión, un procedimiento estable capaz de definir el sistema de la toma de decisiones de preferencia por completo, incluso

antes de comenzar el proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios (Roy, 2010; Figueira, Greco, Roy y Słowinski, 2010).

En general, el proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios se puede resumir de la siguiente manera: dado el conocimiento del dominio del decisor y el conocimiento metodológico del analista; este último interpreta los intereses del cliente y el conocimiento para que pueda mejorar su posición percibida con respecto al proceso de decisión en particular. Esta interpretación debe ser consensuada entre ambos, ya que el cliente debe considerarla como su propia interpretación, mientras que el analista debe considerarla correcta y significativa. Donde al menos las siguientes preguntas tienen que ser respondidas por el tomador de decisiones y por el analista, quienes ahora se perciben como un actor único en el proceso (Tsoukias, 2007):

- ¿Quién es el cliente y por qué necesita un apoyo?
- ¿Cuáles son exactamente las cuestiones relacionadas con el cliente y por qué (dinero, autoridad, tiempo, conocimiento, poder, etc.)?
- ¿Cómo se pueden formular tales cuestiones en un lenguaje de apoyo para la toma de decisiones multicriterio, en términos de un problema de decisión (qué se tiene que convencer, para justificar, de elegir, de analizar, etc.)?
- ¿Qué tipo de apoyo para la toma de decisiones multicriterio esperamos que produzca (que alternativas, cualquier incertidumbre, varios escenarios, etc.)?
- ¿Qué será realizado efectivamente (negociar con los otros actores, imponer una política precisa, ampliar el espacio de interacción, etc.)?

2.4. Enfoques del apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios

El apoyo a la decisión es una actividad que está presente en la vida cotidiana de las personas en ámbitos diversos, sin embargo no todas de ellas están sujetas a un proceso de investigación científica. Para esta investigación, interesan aquellos donde la decisión está basada en modelos abstractos y formales de preferencias, y valores de un tomador de decisiones. Donde dichos modelos de preferencias podrían ayudar a dar respuesta a un problema de decisión semi-estructurado, donde de manera implícita contenga un modelo de racionalidad. Los diferentes enfoques presentes en la literatura sobre la teoría a la decisión y el apoyo para la toma de

decisiones multicriterio difieren en el significado atribuido al modelo de racionalidad del tomador de decisiones, el proceso de obtención del modelo y la interpretación de las respuestas que son proporcionadas al decisor con base en el modelo. De manera general, se pueden encontrar cuatro tipos de enfoques para la toma de decisiones, siendo estos el enfoque normativo, el descriptivo, el prescriptivo y el constructivo; aunque algunos autores omiten la última o dos últimas (Tsoukias, 2007). La Tabla 2.1 muestra las características principales de los cuatro tipos de enfoques:

Tabla 2.1. Características principales de los enfoques de la teoría de la decisión.

Enfoque	**Características**	**Literatura relacionada**
Normativo	Se derivan de modelos de racionalidad de normas establecidas a priori. Tales normas son postuladas como necesarias para el comportamiento racional. Las desviaciones de estas normas reflejan errores o deficiencias del cliente quien debe ser ayudado a aprender a decidir de una manera racional. Estos modelos están diseñados a ser universales, en que deben aplicar para todos los clientes que quieran comportarse racionalmente. Como analogía, se pueden considerar las normas éticas, las leyes y normas religiosas.	Fishburn (1970, 1982), von Neumann y Morgenstern (1944), Luce y Raiffa (1957), Savage (1954), Wakker (1989).
Descriptivo	Se derivan de modelos de racionalidad al observar cómo los tomadores de decisiones toman decisiones. En particular, se pueden vincular las decisiones realizadas con la calidad de los resultados. Estos modelos son de carácter general, en cuanto a que debe aplicarse a una amplia gama de clientes que enfrentan problemas similares de decisión. Como analogía, se pueden suponer a científicos tratando de derivar las leyes de los fenómenos observados.	Allais (1979), Humphreys et al. (1983), Kahneman et al. (1981), Kahneman y Tversky (1979), Montgomery (1983), Montgomery y Svenson (1976), Poulton (1994), Svenson (1996), Tversky (1969, 1972), von Winterfeldt y Edwards (1986).
Prescriptivo	Descubren modelos de racionalidad para un cliente dado de sus respuestas a las preguntas relacionadas con las preferencias. El modelado consiste en descubrir el modelo de la persona que está siendo ayudado a decidir, es decir, revelando su sistema de valores. Por lo tanto, no tienen la intención de ser general, sino sólo ser adecuado para el cliente eventual en un contexto particular. De hecho el cliente puede estar en dificultades al tratar de responder a las preguntas del analista y/o no puede proporcionar una descripción completa de la situación del problema y sus valores. Sin embargo, un enfoque normativo aspira a ser capaz de proporcionar una respuesta apropiada a la mejor	Belton y Stewart (2002), Keeney (1992), Larichev Moshkovich (1995), Roy (1996), Tversky (1977), Vanderpooten (2002), Vincke (1992), Weber y Çoskunoglu (1990).

	información del cliente aquí y ahora. Como analogía, se puede considerar a un médico haciendo preguntas a un paciente, con el fin de descubrir su enfermedad y prescribir un tratamiento.	
Constructivo	Son inducidos a ayudar a un cliente para construir sus propios modelos de racionalidad con base a sus respuestas a las preguntas relacionadas con las preferencias. Bajo esta perspectiva el analista sólo ayuda al cliente a construir el modelo de racionalidad. La "discusión" entre el cliente y el analista no es "neutral" en este enfoque. Realmente tal interacción es parte del proceso de ayuda a la decisión al construir la representación del problema del cliente y anticipar, en cierta medida, su solución. Modelar bajo este enfoque consiste en construir un modelo con la persona que está siendo apoyada a decidir, adecuado para ese cliente eventual y su contexto particular. Como analogía, se suponer un diseñador o un ingeniero tentativamente desarrollando un nuevo producto junto con el cliente.	Checkland (1981), Genard Pirlot (2002), Habermas (1990), Landry (1983b, 1996), Rosenhead (1989), Roy (1996), Schaffer (1988), Watzlawick et al. (1974).

Fuente: Elaboración propia basado en Tsoukias (2007).

A menudo, las diferencias entre los enfoques descritos anteriormente, se resumen a través de los métodos de apoyo a las decisiones existentes, los cuales son admitidos a ser "representativos" del enfoque. Por ejemplo, los métodos que utilizan la utilidad esperada se admite que son "normativos", mientras que las heurísticas de decisión se admiten que son descriptivos. Sin embargo, Tsoukias (2007), considera que es una distinción engañosa; pues es posible adoptar un enfoque constructivo y utilizar un procedimiento de optimización combinatoria, mientras se puede ser normativo y utilizar un método de sobreclasificación basado en MCDA. Lo que hace la diferencia entre los métodos, es cómo se concibe la racionalidad y no el método utilizado. Desde un punto de vista práctico, la diferencia se refiere a la forma en que el proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios es llevado a cabo, no las herramientas utilizadas en él.

En el enfoque normativo se busca encontrar una solución óptima (la mejor), pero para encontrarla en un enfoque donde el tomador de decisiones forma parte del problema, se deben cumplir una serie de axiomas, como la transitividad y la comparabilidad total de las preferencias del decisor. En el análisis multicriterio para la toma de decisiones, el DM es parte del problema y la solución se busca con base a sus preferencias y no sólo en los datos como en el enfoque

normativo; en el cual se le solicita al tomador de decisiones que sus preferencias cubran ambos axiomas, lo cual para él podría ser una tarea compleja, pues tiene que dedicar mucho tiempo en cuidar que se cumplan tales axiomas, si fuese el posible.

La comparación entre alternativas conduce a la generación de relaciones binarias, las cuales juegan un rol en diversas teorías microeconómicas, como lo es en la teoría de la decisión individual y en el contexto de los problemas de elección social. Tal vez el requisito de coherencia más fundamental impuesta a una relación, es el axioma de transitividad. Si una relación se interpreta como relación de preferencia, la transitividad postula que dada una alternativa, si ésta es al menos tan buena como una segunda y la segunda alternativa es, a su vez, al menos tan buena como una tercera, entonces, la primera alternativa debe ser al menos tan buena como la tercera. Sin embargo, desde un punto de vista empírico, así como un punto de vista conceptual, la transitividad es frecuentemente considerada como demasiado exigente, sobre todo en los problemas de decisión en grupo. (Bossert y Suzumura, 2010).

Por otro lado, en la comparabilidad total, el tomador de decisiones tendría que comparar todas las alternativas entre sí. Lo anterior, es un esfuerzo arduo que el tomador de decisiones debe hacer para construir una función de valor; pero si se pudiera garantizar que ambos axiomas se cumplen con dicha función de valor, se podría encontrar una solución óptima.

Pero hay situaciones donde la transitividad o la comparabilidad total no se cumplen, es por ello, que se han creado metodologías más flexibles para la comparación de las alternativas y definición de criterios de evaluación, donde estos últimos, deben cumplir también con una serie de condiciones, las cuales posteriormente serán abordadas.

Asimismo, otros tipos de elementos podrían ser tomados en cuenta en un proceso de decisión, como la incertidumbre, que corresponde a la falta de conocimiento seguro o fiable sobre alguna cosa en particular, que puede ser modelada con la teoría de utilidad. Otro elemento podría ser la vaguedad, la cual puede estar presente en los datos cuando son proporcionados por el tomador del decisiones o cuando se obtienen de otras fuentes y que consiste en que dado un valor en

particular, éste sea percibido diferente de una persona a otra, es decir no es preciso, por ejemplo, la estatura: baja, media, alta. La vaguedad podría ser modelada a través de la lógica borrosa.

El uso de enfoques alternativos al normativo ha ido ganando terreno en las últimas cuatro décadas, en buena razón porque la cantidad de alternativas de solución se ha incrementado con el tiempo, agregando mayor complejidad a los problemas y porque no todos los problemas del mundo real pueden ser modelados desde ese enfoque. Uno de esos enfoques alternativos es el constructivo (descrito en la Tabla 2.1) que se refiere a ayudar a un DM a tomar una decisión, con el acompañamiento de un analista que le ayudará en el proceso de decisión. Cabe señalar que una característica de este tipo de metodologías, es que generalmente existen criterios contradictorios entre sí y que todas las alternativas son soluciones posibles.

De acuerdo con Roy (2010), el analista debe tratar de obtener un conjunto coherente estructurado de resultados. Estos resultados hay que buscarlos en el fin de orientar la toma de decisiones y facilitar la comunicación de las decisiones. Para ello, el analista debe utilizar un enfoque que tiene como propósito, producir conocimiento a partir de las hipótesis de trabajo teniendo en cuenta los objetivos y los sistemas de valores involucrados en el contexto de la decisión. Este enfoque, debe basarse en modelos que son, al menos parcialmente, construidas a través de la interacción con el tomador de decisiones. En primer lugar, la construcción se refiere a la forma en que las acciones estudiadas se tienen en cuenta, así como las consecuencias en que estas acciones serán juzgadas. En segundo lugar, el proceso de construcción se refiere a la forma en que se diseñaron ciertas características (en particular, los valores atribuidos a los diferentes parámetros) del modelo de preferencia que fue considerado más adecuada, teniendo en cuenta las especificidades del contexto de la decisión y las hipótesis de trabajo retenido. En esta concepción, ya no es necesario suponer que existe, en la mente de quien toma la decisión, un procedimiento estable capaz de definir el sistema de toma de decisiones de preferencia completo, incluso antes de comenzar el proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios.

Cuando el analista obtiene una recomendación, a partir del sistema de preferencias del tomador de decisiones, ésta debe estar lo más apegada posible a dicho sistema y reflejar lo que está en el modelo; pues el modelo es un reflejo de las preferencias del DM. Por ello, debe haber

una relación estrecha entre el tomador de decisiones y el analista para poder trabajar con el método a utilizar. En este enfoque, existe la posibilidad de que se tenga que regresar a cambiar valores en las preferencias, máxime cuando son decisiones en grupo, porque las preferencias son dinámicas, es decir, pueden cambiar con respecto al tiempo, debido a que el tomador de decisiones va entendiendo el problema de mejor manera conforme avanza el proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, sobretodo en el caso de los problemas semi-estructurados.

2.6. Proceso de la decisión con MCDA

La principal meta del apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, es proporcionar un conjunto de metodologías de agregación de criterios, que permitan el desarrollo de modelos de apoyo a la decisión, tomando en consideración el sistema de preferencias y juicios de los tomadores de decisiones. Para alcanzar esta meta, se requiere la implementación de procesos complejos, los cuales de manera común, no conducen a soluciones óptimas, sino satisfacen algunas que están en concordancia con las preferencias del tomador de decisiones. Roy (1985), presentó un modelo general de preferencias (ver Figura 2.1), que describe el proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, el cual subraya la operación de todas las metodologías MCDA (Doumpos y Zopounidis, 2004).

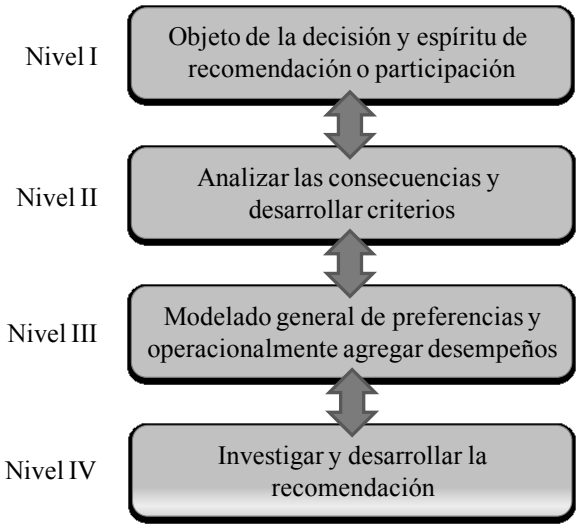


Figura 2.1. Modelado general de preferencias.
Fuente: Roy (1985).

El nivel I corresponde a un conjunto de alternativas de solución A para un problema en particular. Además, el objetivo de la decisión es definido en ese nivel. El conjunto de alternativas A puede ser continuo o discreto. En el caso ser continuo, puede ser especificado a través de restricciones determinadas por el DM o por el ambiente de decisión. Por otro lado, si es discreto, el tomador de decisiones puede desarrollar una lista finita de alternativas, las cuales, serán evaluadas. Con respecto al nivel II, éste involucra la identificación de los factores relacionados a la decisión. El MCDA, asume que estos factores tienen la forma de criterios. Un criterio es una función real g que mide el desempeño de las alternativas en cada una de las características individuales. En lo que concierne al nivel III, en este se procede con la especificación del modelo de agregación de criterios, el cual cumple los requisitos de la naturaleza objetiva del problema, es decir: elección, ordenamiento, clasificación, descripción. Por último, en el nivel IV, el tomador de decisiones es provisto con el soporte requerido para entender las recomendaciones del modelo (Doumpos y Zopounidis, 2004).

2.7. Pilares del MCDA

En un proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios están presentes al menos tres elementos fundamentales, los cuales, permiten el tratamiento de un problema de decisión. Estos elementos corresponden a las alternativas de decisión, familia coherente de criterios y la definición del tipo de problema a tratar. El entendimiento y aplicación correcta de estos conceptos, favorece a que el resultado de este proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios no sea incongruente con las preferencias del DM. Estudios detallados sobre esta temática pueden ser encontrados en Bouyssou et al. (1990), Bouyssou et al., 2006), Roy (1991), Vincke (1992), entre otros.

2.7.1. Alternativas de decisión

En un proceso de decisión, las alternativas corresponden a la definición formal de las posibles acciones u opciones que se tienen en consideración, para cualquier problema tratado en el análisis multicriterio para la toma de decisiones.

2.7.2. Familia coherente de criterios

Los criterios de evaluación deben estar diseñados para capturar la naturaleza multidimensional del desempeño de las alternativas. Al elegir una familia de criterios para evaluar un conjunto de alternativas, está debe ser de un número suficientemente pequeño (legible), debe ser operativa; además, debe contener todos los puntos de vista (exhaustivo), ser monótona y que cada criterio sea contado sólo una vez (no redundancias). Al cumplirse estas reglas, se está definiendo una familia coherente de criterios (Bouyssou, 1990).

2.7.3. Tipo de problema a tratar

Los problemas de toma de decisiones pueden ser clasificados en dos categorías: *problemas de decisión discretos* y *problemas de decisión continuos*. La primera de ellas, consiste en el involucramiento de un conjunto de alternativas de decisión, donde cada una de ellas es descrita a través de una serie de atributos que tienen un significado de criterios de evaluación. La segunda categoría existe la posibilidad de que el conjunto de alternativas tienda a ser infinito. Por tanto, sólo se puede identificar la región donde se encuentran las alternativas de decisión; conocida como región factible o región solución, en la cual, cada uno de los puntos de dentro de dicha región, concierne a una alternativa específica (Doumpos, y Zopounidis, 2004). La Figura 2.2 muestra las categorías de los problemas discretos y continuos.

Problemas discretos

	CRITERIOS			
ALTERNATIVAS	g_1	g_2	..	g_m
A_1	1.5	10	..	7
A_2	1.6	9	..	7
:	:	:	:	
A_n	0.9	12	..	6

Problemas continuos

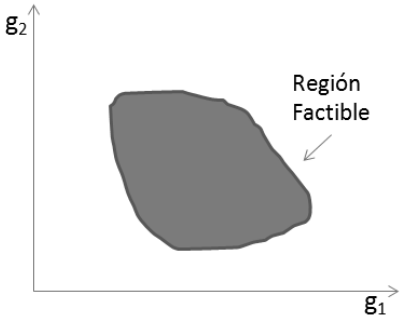


Figura 2.2. Ejemplo de categorías de los problemas discretos y continuos.
Fuente: Elaboración propia con base en (Doumpos y Zopounidis, 2004. p. 2).

Doumpos, y Zopounidis (2004) y Roy (1985), sustentan que dentro de los problemas discretos, existen cuatro tipos de análisis o problemas de decisión, que pueden apoyar al DM en

su tarea de realizar su decisión. De esos problemas, Figueira et *al*. (2010) consideran como principales, a los tres últimos de la lista siguiente:

- Identificarlas y describirlas por sus características.
- Ordenarlas en orden de la mejor a la peor (ranking).
- Seleccionar las mejores (choice).
- Clasificarlas en grupos homogéneos (sorting).

Dado un conjunto de alternativas, con base a sus preferencias, el tomador de decisiones puede realizar una descripción de las acciones y de sus consecuencias, utilizando un lenguaje apropiado. Por su parte, el problema de selección consiste en elegir un número restringido de alternativas potenciales más interesantes, tan pequeño como sea posible, lo cual justifica eliminar al resto. Por otro lado, el ranking consiste en hacer un ordenamiento de las alternativas de la mejor a la peor, con la posibilidad de empates e incomparabilidades. Por último, la clasificación (sorting) consiste en asignar cada una de las alternativas a una familia de categorías definidas previamente; estas categorías por lo general están ordenadas de la peor a la mejor. (Doumpos, y Zopounidis (2004); Figueira et al., (2010)).

En el problema de clasificación, el resultado depende de la evaluación absoluta de las alternativas; es decir, para la asignación de una alternativa en una categoría, se tiene en cuenta sólo su evaluación intrínseca sobre todos los criterios y no depende ni influye la categoría para ser seleccionada para la asignación de otra alternativa; esto es, cada alternativa esta asignada a una categoría específica, con base en reglas determinadas y por lo general, la definición de las reglas no depende de las alternativas de decisión evaluadas. Por el contrario, en los problemas de selección y ordenamiento, las alternativas son comparadas entre sí y el resultado depende en estos casos, de la evaluación relativa, en lugar de una absoluta en el caso anterior. En otras palabras, el resultado global de la evaluación tiene un significado relativo que depende de las alternativas en evaluación. Por ejemplo, cuando se determina que una alternativa de decisión es la mejor de entre un conjunto de ellas, es el resultado de juicios relativos y la mejor alternativa, puede cambiar si se altera el conjunto de alternativas (Doumpos, y Zopounidis (2004); Figueira et al., (2010)).

Respecto a los problemas de ranking y sorting, Bouyssou et al., (2006), consideran estos se pueden identificar de la siguiente manera:

- *Ordenamiento:* Si las categorías no están predefinidas y ordenadas;
- *Clasificación:* Si las categorías están predefinidas y sin ordenar;
- *Sorting:* Si las categorías están predefinidas y ordenadas;

Este trabajo de investigación, tiene que ver con el problema de ordenamiento, de manera particular, del problema de ranking de un conjunto de alternativas de tamaño mediano; que debido al número de alternativas, es posible que algunas de ellas sean indiferentes entre sí, formándose clases o grupos de alternativas ordenadas. Estos grupos, son formados de manera natural por las relaciones entre las alternativas y por definición no puede considerarse un problema de sorting, debido a que las clases no son definidas a priori. Pudiera ser considerado como un problema de agrupamiento ordenado, toda vez que en él, las alternativas forman los grupos por sus propias características. Pero, tomando en consideración que el problema de agrupamiento ordenado es definido aquí como un tipo de problema de ordenamiento, se determinó trabajar con este último tipo de problema, sin dejar de lado elementos del problema de agrupamiento.

2.8. Modelación de preferencias con el método ELECTRE

Debido a que en esta investigación, se utiliza una relación de sobreclasificación valuada construida con el método ELECTRE-III, la cual sirve de entrada al algoritmo evolutivo multiobjetivo desarrollado, en este apartado se aborda la modelación de preferencias utilizando ese enfoque de sobreclasificación. Sin embargo, como se mencionó en apartado 1.2.2 sobre las alternativas de solución, el algoritmo desarrollado puede recibir de entrada una relación de sobreclasificación construida con PROMETHEE u otro método. Este apartado está basado en el trabajo de Roy (1991).

2.8.1. Introducción al enfoque de sobreclasificación

El concepto de las relaciones sobreclasificación nace de las dificultades encontradas con diversos problemas concretos. Desde entonces, numerosas aplicaciones del concepto han sido desarrolladas. A continuación se presentan los fundamentos:

2.8.1.1. Anotaciones preliminares y definiciones

Con el fin de entender lo que es el enfoque de sobreclasificación y qué tipo de problemas del mundo real se refiere, es necesario especificar lo siguiente:

(a) Un conjunto A de *acciones o alternativas potenciales* es considerado (véase Roy, 1990). Estas acciones no son necesariamente excluyentes, es decir, se pueden poner en funcionamiento de forma conjunta.

(b) Una familia coherente F de n *criterios coherentes* g_j ha sido definido (véase Bouyssou, 1990). Esto significa que las preferencias de los actores involucrados en el proceso de toma de decisiones, están formadas, discutidas y transformadas por referencia a los puntos de vista adecuadamente reflejados por criterios de F.

(c) Al hacer hincapié en un criterio determinado, por ejemplo, el $k-ésimo$. La imprecisión y/o incertidumbre y/o la inexacta determinación de los rendimientos (performances) puede conducir a algún actor a juzgar (véase Roy, 1988):

- a' indiferente a a cuando $g_j(a') = g_j(a) \forall j \neq k$ aun si $g_k(a') \neq g_k(a)$;
- a' estrictamente preferida a a cuando $g_j(a') = g_j(a) \forall j \neq k$ solo si la diferencia $g_k(a') - g_k(a)$ es suficientemente significativo.

(d) Si el DM es un tomador de decisiones místico, inaccesibles o vagamente definido, el modelo es sólo un sistema de preferencias, con el cual, es posible trabajar para llevar a término los elementos de una respuesta a determinadas preguntas.

En estas condiciones, el modelo global de preferencias permite tener en cuenta las dudas entre dos de los tres casos siguientes:

- $a'Ia$: a' Indiferente a a ,
- $a'Pa$: a' Estrictamente preferida a a ,
- aPa' : a Estrictamente preferida a a' ,

De acuerdo con los tipos de incertidumbres, se habla de:

- Preferencia débil (relación Q):

- $a'Qa$ si la duda es entre $a'Ia$ y $a'Pa$ (estando seguro que $no\, aPa'$),
- aQa' si la duda es entre $a'Ia$ y aPa' (estando seguro que $no\, a'Pa$);

- Incomparabilidad (relación R): $a'Ra$ si la duda es con $a'Pa$ y aPa' (al menos).

2.8.1.2. El concepto de sobreclasificación: nivel de preferencias restringida al criterio g_j

Para cada criterio, g_j es posible asociar una relación de sobreclasificación restringida S_j . Por definición, S_j es una relación binaria: $a'S_j a$ se mantiene si los valores de los desempeños $g_j(a')$ y $g_j(a)$, dan un argumento suficientemente fuerte para considerar la siguiente declaración como verdadera en el modelo de preferencias del DM:

"a' solo con respecto al criterio $j-ésimo$, es al menos tan bueno como a'". (Aquí "al menos tan buena como" es sinónimo a "no peor que").

2.8.1.3. Nivel de preferencias integral

Al tomar en cuenta una familia completa de criterios, es posible definir una *relación de sobreclasificación inte*gral S . Por definición, S es una relación binaria: $a'S_j a$ se mantiene si

los valores de los desempeños introducidos en $g_j(a')$ y $g_j(a)$ producen un argumento suficientemente fuerte para considerar la siguiente declaración como verdadera en un modelo de preferencias del DM:

"a', con respecto al criterio n, es al menos tan buena como a".

Para ilustrar este concepto, considérese el siguiente ejemplo numérico definido en la Tabla 2.2. Es obvio, que las afirmaciones de bSa, aSb y cSd se mantienen. Salvo en casos muy raros (en el que el último criterio tendría una enorme importancia), la afirmación cSa se mantiene. Pero, en ausencia de una regla de agregación e información adicional, ninguna de las siguientes afirmaciones parecen ser aceptadas: cSb, bSc, dSb y bSd.

Tabla 2.2. Ejemplo numérico del concepto de sobreclasificación.

Alternativas (A)	**Criterios** (F) g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	$\forall j \in F : q_j = 5$
a	50	50	50	50	50	y
b	55	46	48	54	55	$0 \le g_j(a) \le 100$
c	90	90	90	45	42	
d	90	90	90	10	10	

Fuente: Roy (1991)

Este ejemplo muestra que para definir una relación de sobreclasificación integral, es necesario S sobre A, es necesario formular una serie de condiciones apropiadas, las cuales, cuando son satisfechas puede ser vista como argumentos suficientemente fuertes para justificar la aseveración $a'Sa$.

2.8.1.4. Propiedades fundamentales de las relaciones de sobreclasificación

Considérense las n relaciones de sobreclasificación restringidas S_j, enlazadas a los n criterios de F y a una relación binaria S, agregando el mismo criterio. Entonces, S puede ser vista como

una relación de sobreclasificación integral (en conformidad con el significado dado anteriormente a este concepto), parece natural exigir que S, verifique las siguientes propiedades:

(a) S es reflexiva $(aSa \forall a \in A)$ y, para $a' \neq a$, el significado de cada configuración mostrada en la Figura 2.3:

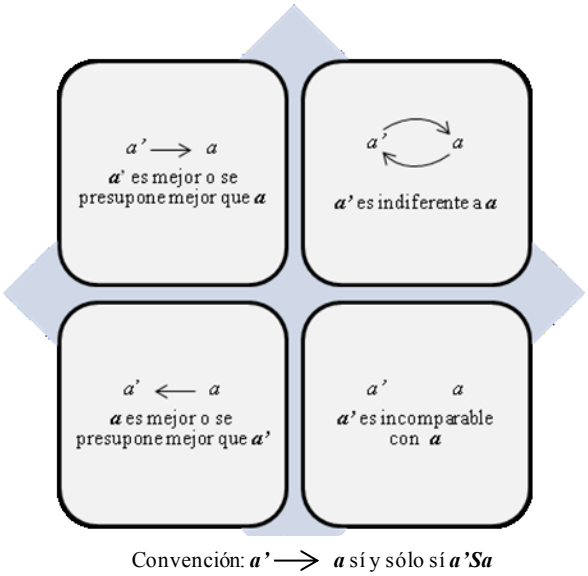


Figura 2.3. Las cuatro configuraciones posibles en la comparación de dos acciones a' y a.
Fuente: Elaboración propia basado en Roy (1991, p.54).

Obsérvese que:

- $a'Sa$ y $no\, aSa'$ no pueden ser interpretadas, sin algunas precauciones como a es estrictamente preferida a a';

- S no es necesariamente una relación binaria transitiva.

(b) Se denota por Δ_F la relación de dominancia definida por:

$a\Delta_F$ si y solo si $g_j(a) \geq g_j(b) \forall j \in F$.

S se tiene que verificar, independientemente las potenciales acciones a, a', b y b' son:

$a'Sa$ y $a\Delta_F b \Rightarrow a'Sb$,

$b'\Delta_F a'$ y $a'Sa \Rightarrow bSa$

Consecuentemente, se tiene

$a\Delta_F b \Rightarrow aSb$

(c) Finalmente, es natural preguntar:

Si $g_j(a') = g_j(a) \forall j \neq k$, entonces $a'Sa$ sí y solo si $a'S_k a$.

Esta condición puede ser reforzada como sigue:

Si $a'I_j a \forall j \neq k$, entonces $a'Sa$ sí y solo si $a'S_k a$.

A partir de esta última propiedad combinada con la anterior, se puede deducir:

$a'S_j a \forall j \in F \Rightarrow a'Sa$.

Originalmente, Bernard Roy aplicó el método ELECTRE en 1965 para apoyar la selección de una acción o acciones, sobre un conjunto de ellas; es decir, se enfocó en el problema de selección. Hoy en día, ELECTRE es una familia de métodos, con los cuales se pueden resolver también problemas de ordenamiento y de clasificación ordinal (sorting). Los miembros de esa familia son: ELECTRE I, II, III, IV, IS, TRI, entre otros.

2.9. Optimización multiobjetivo

La optimización se refiere a encontrar una o más soluciones factibles las cuales corresponden a valores extremos de uno o más objetivos. Cuando un problema de optimización modela un sistema físico que involucra una sola función objetivo, la tarea de encontrar la solución óptima es

llamada optimización de un solo objetivo (mono-objetivo). Pero cuando un problema de optimización involucra más de una función objetivo, la tarea de encontrar una o más soluciones óptimas es conocida como optimización multiobjetivo (Deb, 2001).

Frecuentemente, es complejo tomar decisiones cuando se tienen que cumplir diversos objetivos de forma simultánea. Por ejemplo, una empresa puede tener como objetivo producir lo más posible, pero al mismo tiempo, tener otro objetivo que consiste en reducir sus costos de producción. Otro más, puede ser, que la empresa tenga como objetivo, que un producto sea de alta calidad y al mismo tiempo, tener otro objetivo para minimizar los costos en los insumos del producto. Este tipo de situaciones, naturalmente hace que la toma de decisiones dentro de la empresa y en cualquier organización, se complique.

En ocasiones, un problema de optimización multiobjetivo es modelado como un problema de optimización mono-objetivo, en el cual, un solo objetivo se maximiza o minimiza, definiendo el resto de los objetivos como restricciones del modelo. Otras veces, las funciones objetivos son transformadas en una sola función objetivo, similar a una suma ponderada de funciones objetivo. El problema de esta variante, es la definición de los pesos que tiene cada una de las funciones objetivo en la suma. Ambas estrategias, están orientadas a simplificar el tratamiento del problema de naturaleza multiobjetivo, sin embargo, no siempre es adecuado hacer este tipo de transformaciones.

Concretamente, un problema de optimización multiobjetivo consiste en dado un problema de decisión en particular, elegir una solución más preferida cuando dos o más funciones están en conflicto respecto a su orientación (maximizar o minimizar). La principal dificultad de este tipo de problemas es que no hay una manera simple de definir el concepto de *solución más preferida*, a diferencia de lo que sucede en los problemas de optimización mono-objetivo. En las últimas tres décadas ha habido un gran interés por desarrollar conceptos sobre qué se considera una solución más preferida, así como en el desarrollo de algoritmos que ayuden al tomador de decisiones (DM) a encontrar soluciones. Lo anterior es debido a la aplicabilidad de la optimización multiobjetivo en diversos problemas del mundo real como las finanzas, la planeación académica, la publicidad, entre otros; (Benson, 2009).

De acuerdo con (Ehrgott, 2005), históricamente la primera referencia respecto a hacer frente a situaciones donde existen objetivos en conflicto se suele atribuir a Vilfredo Pareto en 1896, cuyo legado al respecto, consiste en que dado un conjunto de miembros de un colectivo, éstos gozan de optimalidad máxima, si no es posible mover los valores de un miembro sin que se afecte o disminuya al resto de los miembros del colectivo. Actualmente, en los problemas de optimización multicriterio, a estas alternativas se les conoce como soluciones *Pareto óptimas o soluciones eficientes*.

Un ejemplo de la modelación de un problema de optimización multiobjetivo puede ser: encontrar un vector $\vec{V}^*$ que satisfaga las restricciones $g_i(\vec{V})$ y $h_j(\vec{V})$. Que además, optimice la función $\vec{f}(\vec{V})$, de tal manera que $\vec{V}$ sea el vector óptimo, es decir, el vector de las variables de decisión del problema. Este modelo puede ser planteado como sigue:

$$\vec{V}^* = \left[v_1^*, v_2^*, ...v_m^*\right] \tag{1}$$

restricciones:

$g_i(\vec{V}) \geq 0; i = 1,2,..n$

$h_j(\vec{V}) > 0; j = 1,2,..n$

que optimice la función vectorial

$$\vec{f}(\vec{V}) = \left[f_1(\vec{V}), f_2(\vec{V}), ..f_k(\vec{V})\right] \tag{2}$$

donde:

$\vec{V} = \left[v_1, v_2, ..v_m\right]$ es el vector de variables de decisión

Es conocido que la optimización combinatoria proporciona una poderosa una herramienta para formular y modelar muchos problemas de optimización (Teghem, 2009). La optimización combinatoria es un campo de las matemáticas aplicadas, que combina técnicas de combinatoria,

programación lineal y teoría de algoritmos, para resolver problemas de optimización sobre estructuras discretas (Cook et al. 1998). Con ella, se trata de encontrar el máximo o el mínimo de una función en particular, sobre un conjunto finito de soluciones. Dicho conjunto, denota que las variables de decisión son discretas y que no se exige ninguna condición o propiedad sobre la función objetivo o la definición del conjunto de soluciones.

A pesar de que la optimización combinatoria es frecuentemente una forma realística y eficiente de tratar muchas aplicaciones del mundo real, hasta recientemente, la optimización combinatoria multiobjetivo no había recibido mucha atención; posiblemente debido a las dificultades específicas de dichos modelos (Teghem, 2009). Cuyas tres principales tienen relación con:

- El número de soluciones eficientes pueden ser muy grandes.

- La característica no convexa del conjunto factible requiere procedimientos de técnicas específicas para generar las llamadas soluciones eficientes "no compatibles".

- La dificultad de la elaboración de métodos para evitar introducir restricciones adicionales que se puedan conservar durante todo el procedimiento la forma particular de las restricciones.

Típicamente, para resolver problemas de optimización combinatoria, se utilizan algoritmos conocidos como exactos o directos, o bien se utilizan algoritmos heurísticos. Los exactos, están diseñados para localizar la solución óptima, es decir, aquella solución en la que la función objetivo alcanza su valor extremo. Por otro lado, los heurísticos encuentran una solución lo suficientemente “buena”, sin garantizar que ésta sea la óptima. Se podría pensar que es buena idea prescindir de los algoritmos heurísticos, toda vez que los exactos encuentran la solución óptima. Sin embargo, como se verá más adelante, los heurísticos presentan algunas ventajas sobre los exactos en este tipo de problemas combinatorios.

El problema ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, tratado en este trabajo, es considerado como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo (ver apartado 1.2), ya que al formar las clases de alternativas, se "discriminen las alternativas no indiferentes" siendo su dirección a minimizar el número de pares de alternativas no indiferentes entre sí. Por ello, la solución de este problema puede interpretarse como el mejor compromiso entre estos dos objetivos en conflicto.

2.9.1. Algoritmos

El concepto de algoritmo puede ser expresado desde el punto de vista de la máquina de Turing[10] o de algún otro modelo formal de computación (Cook et al. 1998). Pero en general, se puede decir que es una secuencia de pasos finitos para la solución de un problema determinado. La ejecución de un algoritmo se puede llevar a cabo de manera manual o automática con la ayuda de equipos de cómputo.

El uso de algoritmos implementados en programas de cómputo, permite presentar recomendaciones y resolver problemas en diversas áreas del conocimiento, como la ingeniería, la medicina, la física, la economía, etc., con casos donde los resultados obtenidos son mejores a presentados por expertos. Sobre esto último, Kahneman (2011) señala que a más de 50 años de que se publicara el libro *Clinical vs Statistical Prediction: A Teorical Analysis and a Review of the Evidence* de Paul Meehl; el número de investigaciones entre predicciones clínicas y predicciones estadísticas ha aumentado un 2% y que el debate entre algoritmos y humanos no ha cambiado. En esos estudios, alrededor de un 60% de las ocasiones los algoritmos han tenido significativamente un acierto mayor y en el resto hubo un empate en aciertos. De igual manera, Kahneman (2011) considera que en problemas donde se da un grado importante de incertidumbre e impredecibilidad, como en las del área de la salud, mediciones económicas, predicción de éxito de iniciativas empresariales, evaluación de riesgos crediticios de instituciones financieras, evaluaciones de trabajos científicos, entre otros; el acierto de los expertos fue igualado o excedido por un simple algoritmo.

[10] Es un modelo de una computadora de propósito general propuesta por Alan Turing en 1936, que tiene memoria ilimitada y sin restricciones. Puede hacer cualquier cosa que una computadora real puede hacer. No obstante, aun una maquina de Turing no puede resolver ciertos problemas, en un sentido real, esos problemas están más allá de los límites teóricos de la computación (Sipser, 2006).

El método desarrollado en este trabajo, está diseñado para apoyar la decisión frente al problema de ordenamiento de alternativas de tamaño mediano y puede ser utilizado en empresas públicas, privadas o sociales. El algoritmo explota las preferencias del tomador de decisiones, expresada a través de una relación de sobreclasificación valuada.

2.9.2. Espacios de búsqueda y optimización

Diversos problemas presentes en el ámbito industrial y en la investigación pueden ser formulados como una búsqueda o como una optimización. Es decir, dado un problema determinado, se busca un conjunto de valores que permiten llevarlo a una determinada configuración o bien, a un conjunto de valores que permiten optimizar, ya sea el rendimiento, la calidad, el precio, etc. (Araujo y Cervigón, 2009).

Un método clásico para encontrar una solución en un conjunto de datos simple es la utilización de algoritmos exactos o directos que hacen una búsqueda exhaustiva. Es decir, recorren todo el espacio de búsqueda encontrando con ello el valor óptimo. El problema con esta forma de búsqueda, es que cuando el espacio es grande o continuo, el tiempo para encontrar la solución puede durar horas, días, meses o incluso no terminar jamás; además podría consumir altos recursos computacionales.

Por ejemplo, ordenar un conjunto de números en un determinado orden (ascendente o descendente), es una tarea simple que puede hacerlo una simple computadora utilizando un algoritmo directo. Pero, el problema de horarios de clase en una Universidad satisfaciendo diversas restricciones, tales como que dos clases no pueden ser programadas al mismo tiempo en un mismo espacio físico, puede hacer que con un número de mil clases, encontrar el mejor calendario puede requerir siglos, incluso utilizando una supercomputadora (Sipser, 2006). Una revisión de técnicas metaheurísticas para resolver problemas de horarios en Universidades puede ser encontrada en Lewis (2008).

Diversas técnicas de búsqueda para encontrar soluciones han sido desarrolladas para resolver problemas de optimización combinatoria. Una de ellas es el método clásico de optimización para problemas continuos conocido como el *escalador de colinas* (Hill Climbing por el idioma inglés), el cual consiste en la búsqueda del mejor valor en un conjunto de datos utilizando el

procedimiento siguiente: a partir de una posición inicial elegida al azar, se evalúa si el valor actual de la función (*f*) que se busca optimizar es mejorado por cualquiera de los dos puntos vecinos inmediatos, si alguno de ellos mejora el valor de la función, entonces la función toma ese nuevo valor. Se repite el procedimiento en una sola dirección hasta que no es posible mejorar el valor de la función (ver Figura 2.4).

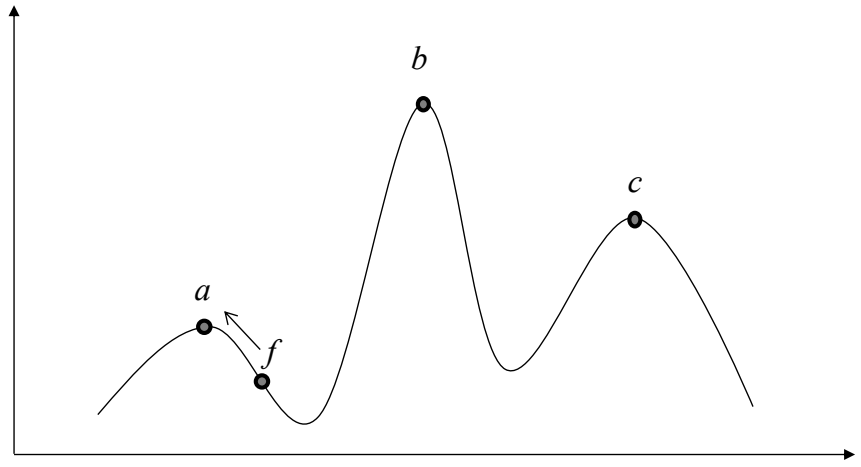


Figura 2.4. Ejemplo de aplicación del algoritmo de búsqueda escalador de colinas
Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse en la Figura 2.4, el punto inicial de la función (f) al ser comparada con sus puntos vecinos, tenderá hacia la izquierda hasta llegar al óptimo local (a) y no a uno mejor como el (b).

Una dificultad para resolver problemas de optimización, está en su complejidad computacional, debido a que la mayor parte de los problemas del mundo real tienen una complejidad exponencial, lo que implica que los métodos deterministas de resolución como el escalador de colinas, no son capaces de resolverlos a partir de un cierto tamaño del problema (Araujo y Cervigón, 2009). En ese mismo sentido, Ghanea y Hercock(2003), afirman que el método de escalador de colinas y los basados en cálculo pueden tener grandes dificultades para resolver problemas con espacios de óptimos múltiples y que es incluso menos útil en espacios discontinuos e irregulares.

2.9.3. Metaheurísticas

Existen numerosos problemas de decisión del mundo real que pueden ser formulados como problemas de optimización; estos problemas se pueden encontrar en el ámbito de los negocios, la ingeniería, las ciencias; de manera específica en la manufactura, problemas de horarios, de definición de rutas, entre otros. Como se ha mencionado ya, la complejidad de este tipo de problemas conducen a soluciones de gran dimensión, donde el desempeño de los algoritmos exactos es frecuentemente bajo, sobre todo el tiempo necesario para explorar el espacio de soluciones. Por ello, es recomendable la utilización de algoritmos heurísticos para este tipo de problemas.

Una heurística es una técnica consistente de una regla o un conjunto de reglas la cual busca (y regularmente encuentra) buenas soluciones con un costo computacional razonable. Una heurística es aproximada en el sentido que ésta proporciona (esperadamente) una buena solución con relativamente poco esfuerzo, pero no garantiza optimalidad (Voss, 2009). Por otra parte, una metaheurística es una estrategia de alto nivel que guía a una heurística básica a resolver un problema dado. Visto de otra manera, es un proceso maestro que guía y modifica las operaciones de heurísticas subordinadas para producir eficientemente soluciones de alta calidad.

Como una extensión de heurísticas simples, se han desarrollado un gran número de enfoques de búsqueda local para mejorar soluciones factibles dadas. La principal desventaja de esos enfoques, es su inhabilidad para continuar la búsqueda al quedar atrapados en un óptimo local. Lo cual conduce a la consideración de técnicas para guiar a las heurísticas a dominar dicha optimalidad local. Por ello, las metaheurísticas se han convertido en una clase importante de enfoques para solucionar problemas de optimización. Estas, dan apoyo a gerentes para tomar decisiones con herramientas robustas que proporcionan soluciones de alta calidad en aplicaciones importantes en tiempos razonables (Voss, 2009).

Existe una diversidad de métodos metaheurísticos entre los cuales se encuentran el Recocido Simulado, la Búsqueda Tabú (TS), Técnicas de Computación Evolutiva (Programación Evolutiva, Algoritmos Genéticos), Inteligencia de Enjambre (Paradigmas de Colonias de Hormigas, Sistemas de Abejas), etc. En este trabajo se optó por la computación evolutiva,

específicamente con algoritmos evolutivos, porque estos han demostrado su eficiencia en el tipo de problema en cuestión y además, se tenía como precedente el trabajo de Leyva y Aguilera (2005), respecto a la forma de explotar una relación de sobreclasificación valuada para generar un ranking utilizando este tipo de algoritmos.

2.9.3.1. Algoritmos evolutivos

Los Algoritmos Evolutivos (EA, por sus siglas en inglés) son una técnica que permite resolver problemas relacionadas con búsquedas y optimización siguiendo la teoría de la evolución de las especies de Charles Darwin. El objetivo de los algoritmos evolutivos es obtener mejores individuos (soluciones) a medida que el algoritmo avanza en el tiempo de ejecución.

Dado un número de generaciones (iteraciones) de un algoritmo evolutivo, su funcionamiento general es el siguiente: en cualquier generación, la población de individuos es combinada y alterada para obtener una nueva población, a cuyos individuos se le conoce como descendientes o hijos. Posteriormente, los padres e hijos son sometidos a un proceso de selección y evaluación, donde los mejores individuos tienen mayor oportunidad de supervivencia. Es decir, se seleccionan a los individuos mejor adaptados en una generación, utilizando una mezcla de búsquedas aleatorias y dirigidas, permitiendo con ello explorar el espacio de soluciones de una manera más eficiente y encontrar mejores soluciones que con las técnicas de búsqueda exhaustiva y con los métodos que utilizan la aleatoriedad como único recurso (Araujo y Cervigón, 2009).

Los algoritmos evolutivos han demostrado ser muy poderosos y generalmente aplicables para resolver problemas de un simple objetivo, aunque por su estructura fundamental, pueden ser aplicados para resolver problemas multiobjetivos (Coello et al. ,2002). En diversas áreas del mundo real, este tipo de algoritmos han sido utilizados donde los métodos de optimización tradicionales no presentan buenas soluciones, debido a la naturaleza de los problemas que incluyen múltiples objetivos. En relación a lo anterior, (Zitzler y Thiele, 1999), afirman que los algoritmos evolutivos son particularmente aptos para la optimización multiobjetivo por su habilidad para explorar un conjunto extenso de alternativas, debido a que pueden evaluar varias soluciones en paralelo. Ejemplos de aplicaciones en la ingeniería, economía, finanzas, la

industria, transporte, agenda, entre otros, pueden ser encontradas en Coello y Lamont, (2004) y Tan, Khor y Lee (2005), entre otros.

La economía y la administración son áreas de investigación muy prometedoras para aplicar algoritmos evolutivos por dos razones. Por un lado, los problemas dentro de esas áreas son complejos y por otra parte, aún cuando el uso de algoritmo evolutivos en esas áreas no es emergente, el uso de algoritmos evolutivos multiobjetivos es aún escaso y no hay muchos problemas que hayan sido tratados (Fontes, y Gaspar-Cunha, 2010)

Existe una variedad de algoritmos evolutivos que han sido desarrollados para abordar diferentes tipos de problemas, siendo las variantes más conocidas las siguientes: Algoritmos Genéticos (Holland, 1975), Estrategias Evolutivas (Schewelf, 1981), y Programación Evolutiva (Fogel, et al., 1966), Búsqueda Dispersa (Glover, 1977), y más recientemente los Algoritmos meméticos (Moscato, 1989) y la programación Genética (Koza, 1992).

2.9.3.1.1. Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son tipo un de algoritmo evolutivo propuesto por John Holland (Holland, 1975) y pueden utilizarse para resolver problemas de búsqueda y optimización por la capacidad de adaptación que poseen, presentando soluciones a problemas del mundo real conforme avanza la ejecución del mismo. Estos algoritmos constituyen un punto intermedio al reunir componentes de búsqueda aleatoria y de búsqueda dirigida por la selección. Estos no escalan de forma uniforme hacia regiones de mejor adaptación, sino que cuentan con mecanismos que les permiten cruzar regiones de baja adaptación, a través de los mecanismos de selección no determinista y la mutación (Araujo y Cervigon, 2009). En general, la ejecución de un algoritmo genético sigue la secuencia presentada en la Figura 2.5.

En la literatura, se pueden encontrar diferentes propuestas donde se utilizan los algoritmos genéticos en problemas de optimización y/o en problemas del análisis multicriterio para la toma de decisiones. Entre ellos se encuentran: el Algoritmo Genético Multiobjetivo (MOGA) de Fonseca y Fleming (1993), el Algoritmo Genético de Nicho de Pareto (NPGA) propuesto por Horn, et al. (1994), el Algoritmo Genético de Ordenamiento no Dominado (NSGA, NSGA II) de

Srinivas y Deb (1995) y Deb, et al. (2002) respectivamente, el Algoritmo Evolutivo Fuerte de Pareto (SPEA, SPEA-2) desarrollado por Zitzler, et al. (2001), el ELECTRE-MOEA presentado por Leyva y Aguilera (2005), etc.

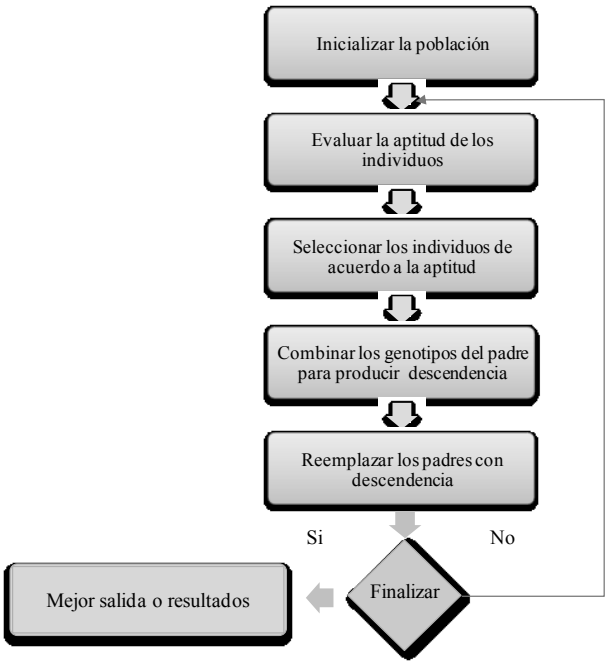


Figura 2.5. Secuencia de operaciones de un algoritmo genético.
Fuente: Elaboración propia con base a (Ghanea-Hercock, 2003. pp. 29).

2.10. Ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano

Como se mencionó en el apartado 1.1.1., sobre el problema de ordenamiento multicriterio, el problema de agrupamiento multicriterio ordenado puede considerarse un tipo de problema de ordenamiento multicriterio, donde existen conjuntos de alternativas indiferentes entre sí, formando con ello, clases de alternativas. Sin embargo, los trabajos publicados con relación al problema de agrupamiento, aportan importante conocimiento para abordar el problema de ordenamiento de conjuntos de alternativas de tamaño mediano. Por ello, a continuación se analiza el problema de agrupamiento de manera detallada.

2.10.1. Fundamentos del problema de agrupamiento

El agrupamiento de un conjunto de elementos a partir de sus similitudes en subgrupos homogéneos, es un problema que ha sido estudiado desde muchas áreas del conocimiento debido

a su importancia para el desarrollo de nuestras sociedades. De manera general, se pueden considerar dos problemas distintos. El primer problema - el problema de agrupar objetos "similares" en grupos homogéneos - surge cuando los grupos son desconocidos "a priori" y el objetivo es obtenerlos así como la información contenida en ellos. A este problema se le conoce como el problema de "clustering" o problema de agrupamiento y los grupos formados son conocidos como "clusters" o agrupamientos. El segundo problema – el problema de clasificación - se presenta una vez que los grupos han sido definidos a priori. El problema de asignar cada una de las alternativas de decisión a uno y solo uno de los grupos se le conoce como problema de clasificación y, en este caso, a los grupos se les llama "clases" (Baroudi y Safia, 2010; Nemery de Bellevaux, 2006). En este trabajo de tesis sobre ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, los clusters reciben el nombre de clases de alternativas o simplemente clases.

Una variante importante del problema de agrupamiento es aquel que surge cuando una vez creados los grupos, se desea que estén ordenados. De acuerdo a la taxonomía de los procedimientos de clustering presentada en Cailloux, Lamboray y Nemery de Bellevaux (2007), este es el caso del llamado problema de agrupamiento ordenado.

En el problema de clustering, existen diferentes tipos de agrupamiento tales como la partición, el jerárquico, la pirámide, etc. siendo los más frecuentes los primeros dos. Siendo la partición el tipo de agrupamiento tratado en este trabajo. Entre los algoritmos de particionamiento tradicionales tal vez el más conocido y usado es el denominado *k-means*[11].

En la partición, el universo de elementos es dividido en subconjuntos mutuamente excluyentes, donde cada elemento o alternativa de decisión pertenece solamente a un subconjunto, por lo que la intersección por pares es vacía. Una partición puede ser descrita de la siguiente manera:

[11] Este algoritmo ha sido modificado para resolver el problema de agrupamiento multicriterio integrando relaciones de preferencia de tomadores de decisiones (Baroudi y Safia, 2010; Fernández et al., 2010; Nemery de Bellevaux, 2006).

$$C : C = [C_1, \ldots, C_k] \text{ con } C_i \cap C_j = \varnothing, \forall i \neq j \text{ y } \bigcup_i C_i = A \tag{3}$$

Para conocer el número de formas para dividir un conjunto de n elementos dentro de k agrupamientos no vacios se puede determinar por el número de Stirling de segundo tipo $S(n,k)$, (Nemery de Bellevaux, 2006),

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_i^k (k-1)^n \tag{4}$$

Por ejemplo, dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$,

- Puede ser particionado en un solo agrupamiento de una manera,
- En dos agrupamientos de 3 formas: $C = \{\{1,2\},\{3\}\},\{\{1,3\},\{2\}\},\{\{2,3\},\{1\}\}$,
- En tres agrupamientos de una manera: $C = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

La Tabla 2.3 muestra las diferentes formas en las que se puede agrupar el conjunto A del ejemplo anterior.

Tabla 2.3. Distintas maneras de agrupar un conjunto de tres elementos.

$S(n,k)$	Cantidad de Maneras	Maneras distintas de agrupamiento
$S(3,1)$	1	$C = \{1,2,3\}$
$S(3,2)$	3	$C = \{\{1,2\},\{3\}\},\{\{1,3\},\{2\}\},\{\{2,3\},\{1\}\}$
$S(3,3)$	1	$C = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

Notas: Distintas maneras de agrupar un conjunto de tres elementos (n) con valores de agrupamiento $k = 1, k = 2$ y $k = 3$. La primera columna corresponde al número de Stirling con diferentes valores de n y k. La segunda columna contiene la cantidad de maneras en las que se pueden agrupar n elementos en k clusters, obtenidos por el número de Stirling. La tercera columna muestra las distintas maneras de agrupar tres elementos en k clusters.

Fuente: Elaboración propia basado en Nemery de Bellevaux (2006).

La suma de todos los posibles agrupamientos puede ser obtenida con la formula de Bell siguiente:

$$B_n = \sum_k S(n,k) \tag{5}$$

Como puede observarse en la Tabla 2.4, la cantidad de maneras en las que se pueden hacer agrupamientos está en función del número de alternativas existentes (n) y el número de clusters deseados (k). Esta cantidad crece de manera exponencial, haciendo del agrupamiento un problema no trivial.

Tabla 2.4. Ejemplo del número de posibles agrupamientos en k clases no vacías.

n	$S(n,k)$ $1 \le k \le n$						B_n
1	1						1
2	1	1					2
3	1	3	1				5
4	1	7	6	1			15
5	1	15	25	10	1		52
6	1	31	90	65	15	1	203

Notas: n es la cantidad de elementos a agrupar. La segunda columna contiene los diferentes valores del número de Stirling $S(n,k)$ en función del número de elementos n y el número de agrupamientos deseados k. La tercera columna muestra las diferentes cantidades de posibles agrupamientos obtenidas con la formula de Bell (5).
Fuente: Nemery de Bellevaux (2006, p. 5).

Cuando además de generar los agrupamientos se desea que éstos estén ordenados, la complejidad del problema crece aún más, ya que el número de agrupamientos ordenados C de un conjunto de elementos A, es mayor que el número de agrupamientos no ordenados. El número de agrupamientos ordenados O_n para diferentes valores de *n* se muestra en la Tabla 2.5; el cual está dado por la siguiente formula recursiva (Cailloux et al., 2007; Nemery de Bellevaux, 2006):

$$O_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \times O_k = \sum_{k=1}^{n} k! \times S(n,k) \quad \text{con } O_0 = 1;\ O_1 = 1 \tag{6}$$

Tabla 2.5. Número de agrupamientos ordenados para diferentes cantidades de elementos.

n	O_n
1	1
2	3
3	13
4	75
5	541
6	4683

Notas: La primera columna corresponde al número de elementos por agrupar. La segunda columna contiene la cantidad de agrupamientos ordenados obtenidos por la formula recursiva (6).
Fuente: Calloux et al. (2007).

Los algoritmos de clustering conocidos hasta la fecha para generar agrupamientos en el sentido clásico, utilizan criterios basados en una medida de (dis)similaridad, que mide la diferencia entre dos elementos. De acuerdo con (Baroudi y Safia, 2010; Nemery de Bellevaux, 2006), por lo general una medida de (dis)similaridad tiene las siguientes propiedades:

$\forall a_i, a_j \in A : d(a_i, a_j) \rightarrow \Re +\ con$

1.- $d(a_i, a_i) = 0$

2.- $d(a_i, a_j) \geq 0,$ no negatividad

3.- $d(a_i, a_j) = d(a_j, a_i), simetría$

Cuando además de las propiedades anteriores se cumplen las siguientes,

4.- $d(a_i, a_j) = 0 \Rightarrow a_i = a_j$

5.- $\forall a_i, a_j, a_z \in A : d(a_i, a_j) \leq d(a_i, a_z) + d(a_j, a_z),$ desigualdad del triangulo,

entonces, la medida de (dis)similaridad es llamada una distancia.

No todas las medidas de (dis)similaridad son distancias, porque no todas cumplen con la propiedad de simetría y/o la propiedad de desigualdad del triangulo. Una medida es una distancia si cumple las cinco propiedades anteriores.

Baroudi y Safia (2010), sostienen que el concepto de distancia, ampliamente utilizado en técnicas de clustering y clasificación clásicas, no se adapta a los problemas de agrupamiento multicriterio, lo que constituye un impedimento para utilizar de manera apropiada las técnicas de agrupamiento clásicas, algunas de ellas ampliamente probadas por su eficacia, como por ejemplo el algoritmo k-means, basado en una distancia Euclidiana[12].

Diversos métodos de clasificación y agrupamiento convencionales están basados en distancias geométricas o métricas similares lo cual desde el enfoque multicriterio no es apropiado dado que con base en el concepto de distancia, consideran la similitud como un grado indiscernible y en un enfoque de análisis de preferencias de las alternativas de decisión bajo estudio, la idea de similitud debe ser visto como un grado de indiferencia (Fernández, et al, 2010). Es decir, en el análisis multicriterio para la toma de decisiones, dos alternativas pueden ser indiferentes como resultado de un proceso de agregación global, donde se aceptan algunos tipos de compensación entre criterios en conflicto. Por lo anterior, autores como De Smet, Guzman, y Figueira, han extendido el algoritmo *k*-means en un ambiente del análisis multicriterio para la toma de decisiones, considerando de manera explícita, una estructura de preferencia (Cailloux et al., 2007).

En las Tablas 2.3 y 2.4 se observa que cuando $k = 1$, el agrupamiento resultante es un sólo cluster conteniendo todas las alternativas; por otro lado, cuando $k = n$, cada elemento del conjunto original es un cluster en sí mismo. Por lo anterior, cuando se elige o diseña un algoritmo que genera agrupamientos, en el cual no se introduce el número de clusters deseados, el resultado puede tender hacia cualquiera de los dos lados ($k = 1$, ó $k = n$); por ello, se puede decir que este tipo de algoritmos tienen objetivos contradictorios y se tiene que buscar por consenso una

[12] Distancia geométrica entre dos elementos basada en los postulados de Euclides.

solución. Además, es necesario realizar diferentes corridas con diferentes valores de k y se elige el resultado que sea más consistente de acuerdo a las preferencias del tomador de decisiones. En ese sentido, aquí se considera que el número de grupos o clases no debe ser un parámetro de entrada, por el contrario, se deben determinar de manera natural de acuerdo a la información del problema.

Un método que integre las preferencias de un tomador de decisiones para generar grupos, debe utilizar las relaciones de preferencia para hacer comparaciones entre las alternativas y conocer si una alternativa a_i, debería estar en un determinado cluster junto a otra alternativa a_j. Para ello, se deben definir reglas que reflejen la consistencia entre el modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones y el conjunto de clusters C, como las siguientes:

- Si a_1 es preferida a a_2 entonces las alternativas no deberían estar en el mismo cluster
- Si a_1 es preferida a a_2, $a_1 \in C_k$ y $a_2 \in C_t$ entonces C_k debería ser preferida a C_t.
- Si a_1 es indiferente a_2 entonces las alternativas deberían estar en la mismo cluster.

Por ello, un buen algoritmo de esta naturaleza debe buscar que no haya inconsistencias como las siguientes: (*i*) dos alternativas son indiferentes entre sí y estén en clusters diferentes; (*ii*) una alternativa no es indiferente a otra y están en el mismo cluster. Situaciones como estas deberían ser penalizadas. Es decir, debe discriminar a las alternativas "no indiferentes" mientras que al mismo tiempo debe tratar de agrupar alternativas "indiferentes" entre sí. Un elemento que no esté en un cluster en particular, es porque no es indiferente a los elementos que contiene dicha cluster y a las discriminaciones las debe de ubicar en otros clusters.

2.10.2. Antecedentes y trabajos relacionados

La aplicación de los conceptos de problema de clustering clásico hacia el ámbito del análisis multicriterio para la toma de decisiones, se remonta al trabajo de De Smet y Montano (2004), donde presenta una extensión del algoritmo k-means, utilizando una distancia multicriterio basada en una estructura de preferencia (indiferencia, preferencia e incomparabilidad), definida a través de las preferencias del tomador de decisiones. Anterior a este trabajo, Ferligoj y Batagelj

(1992), definen el problema de clustering multicriterio desde el punto de vista multiobjetivo, optimizando diferentes funciones criterio a través de algoritmos directos; sin embargo, las preferencias del tomador de decisiones no fueron tomadas en cuenta. Después, Handl y Knowles (2005), proponen una variante del algoritmo de agrupamiento k-means donde en lugar de utilizar la media para localizar el centroide de cada cluster, utiliza la mediana.

Por su parte, el método presentado por Nemery (2006), utiliza k-means como método de agrupamiento y una medida de disimilitud en lugar de una distancia euclidiana. El problema es tratado de forma mono-objetivo a través de una metaheurística basada en búsqueda Tabú. Además, una propuesta de Algoritmos Genéticos fue implementada solo a nivel de prueba.

Posteriormente, Handl y Knowles (2007), retomando ideas teóricas de Ferligoj y Batagelj (1992), desarrollaron una propuesta utilizando algoritmos evolutivos multiobjetivos, la cual determina de forma automática el número de clusters. Además, Cailloux et al. (2007), presentan una taxonomía de los procedimientos de clustering donde se hace la diferencia entre clustering clásico y clustering multicriterio. De este último, se diferencia si es relacional o no; donde en caso de serlo, se define el concepto de clustering multicriterio ordenado, el cual está relacionado con el trabajo que aquí se presenta.

De Smet y Eppe (2009), presentan una extensión del trabajo de De Smet y Montano (2004), donde además de hacer el agrupamiento de las alternativas en un contexto multicriterio, identificando las relaciones que tiene los clusters entre sí, conocido como clustering multicriterio relacional, de acuerdo con Cailloux et al (2007).

Después Fernández et al. (2010), proponen la utilización de una relación de indiferencia valuada para realizar el agrupamiento y una vez que se realiza ese proceso, es posible hacer un ranking de los clusters, utilizando una relación de preferencia estricta sobre el conjunto de centros de los clusters, combinándolo con información proveniente de la *Regla de Flujo Neto*. Aún cuando sugieren el uso de algoritmos evolutivos debido a la estructura de éste problema multiobjetivo, utilizan un algoritmo directo.

En ese mismo orden de ideas, el método propuesto por Baroudi y Safia (2010) utiliza una distancia multicriterio que hace uso de una estructura de preferencia en conjunto con el índice de similaridad de Sokal y Michener, ampliamente utilizado en métodos de clasificación. Generan el agrupamiento con el método k-means de acuerdo con las distancias entre alternativas, sin realizar un ordenamiento del conjunto de clusters.

El algoritmo exacto propuesto en De Smet et al. (2012), donde se predefine el número de clusters, utiliza una técnica para obtener un ranking y de él derivar un clustering, aunque sin negar que lo hace de manera intuitiva, rápida, fácil y directa, apuesta en mayor grado a una simplificación excesiva de la información que está presente implícitamente en la relación binaria valuada, dejando fuera un análisis más profundo de otras características importantes del modelo, sin explotar por tanto la riqueza de información inherente al mismo.

Por otro lado, Rocha et al. (2012), presentan un trabajo donde agrupan alternativas donde los cluster forman un orden parcial. En esta propuesta se conjugan elementos del análisis de datos y del MCDA. El método está compuesto por cuatro etapas principales, donde en la primera de ellas se utiliza el método k-means basado en una distancia Euclidiana para generar los clusters. Posteriormente, se utiliza ELECTRE (Roy and Bouyssou, 1993) para indicar generar el modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones. Después se realiza el ordenamiento utilizando centroides de las categorías. Por último, se verifica la consistencia de la salida.

Posteriormente, Meyer y Olteanu (2013), definen formalmente el problema de clustering en el ámbito de MCDA sin tomar en cuenta los conceptos del enfoque clásico, sino solamente los elementos pertenecientes en esta área. Además proponen un método basado en Recocido Simulado para realizar los agrupamientos validándolo a través de pruebas con datos generados artificialmente.

Por último, desde el punto de vista del clustering multicriterio, Rocha y Dias (2013), presentan una adaptación al método de clustering aglomerativo (perteneciente al tipo jerárquico, otro de ellos es el divisivo), utilizando una relación de sobreclasificación entre alternativas. El método genera un conjunto de clusters parcialmente ordenado, utilizando para ello una medida que

expresa el porcentaje de pares de alternativas que está de acuerdo con el modelo de preferencias del decisor. Además, la noción de similaridad entre dos clusters cualquiera, es sustituida por una evaluación sobre como la calidad mejora cuando las clusters son combinados. Una limitación que expresan sobre este método es que no garantiza una partición "optima" minimizando las violaciones (inconsistencias).

De estos trabajos presentados, los que tuvieron relación directa para el desarrollo del MOEA-POSET propuesto en esta investigación fueron: Handl y Knowles (2005), De Smet y Eppe (2005) y, Handl y Knowles (2007).

Por otro lado, desde el punto de vista del problema de ranking multicriterio, diversos métodos han sido desarrollados. Entre ellos destacan los métodos ELECTRE-III y PROMETHEE I y II. El primero de ellos, ELECTRE-III[13], es un método para ordenar acciones o alternativas de decisión, cuyas principales ideas introducidas en él, fueron el uso de pseudo-criterios (Roy, 1976) y las relaciones de sobreclasificación valuadas (Figueira et. al, 2005). Este método se divide en dos fases: 1) creación de una relación de sobreclasificación valuada que integra las preferencias de un tomador de decisiones y 2) la conformación del ranking de alternativas de decisión final, el cual es un preorden parcial de alternativas. En el Apéndice B, se presenta el procedimiento de la segunda fase del método ELECTRE-III.

En ese mismo sentido, los métodos PROMETHEE I y II también se dividen en las mismas fases que ELECTRE-III, pero construyen la relación de sobreclasificación y el ordenamiento de las alternativas de forma diferente. El resultado final de la segunda fase de PROMETHEE I corresponde a un orden parcial de alternativas, mientras que PROMETHEE II genera un ranking total o completo. De acuerdo con Behzadian et al. (2010), la mayoría de los investigadores prefieren PROMETHEE II que a otros miembros de la familia PROMETHEE (PROMETHEE III para ranking basado en intervalos, PROMETHEE IV para ranking completo o parcial de alternativas cuando el conjunto de soluciones es continuo, PROMETHEE V para problemas con

[13] ELECTRE-III pertenece a una familia de métodos para los diferentes tipos de problemas multicriterio: ELECTRE I y ELECTRE IS para selección, ELECTRE TRI para clasificación (sorting) y ELECTRE-II y ELECTRE-IV para ordenamiento.

restricciones de segmentación, etc.). En el Apéndice C, se presenta el procedimiento de la segunda fase del método PROMETHEE II.

Alternativamente a los métodos ELECTRE-III y PROMETHEE I y II, se han desarrollado métodos para derivar un ranking de alternativas a partir de una relación de sobreclasificación valuada (Leyva y Fernández (1999), Fernández y Leyva (2004), Leyva y Aguilera (2005), Fernandez, Cancela y Olmedo (2008)). En estas propuestas, se introdujeron algoritmos evolutivos multiobjetivos para la explotación de relaciones de sobreclasificación valuadas, con el fin de construir una recomendación para el problema de ranking multicriterio. Este problema fue modelado desde el punto de vista de optimización combinatoria multiobjetivo y tratado con los MOEA presentados en dichos trabajos[14]. Los MOEA están basados en la idea principal de reducir de las diferencias entre el modelo global de las preferencias y el ranking final. Los rankings obtenidos, corresponden a órdenes totales de alternativas de decisión a excepción de la propuesta de Fernández et. al (2008), que genera un preorden total. Estas propuestas son consideradas como antecedentes relacionados a este trabajo de investigación.

2.10.3. Ordenamiento multicriterio visto como un problema de optimización

Debido a su naturaleza combinatoria, el problema del agrupamiento multicriterio se considera un problema complejo de resolver en la práctica. Por lo que, son deseables técnicas alternativas a los algoritmos exactos, pues estos últimos sólo permiten analizar y agrupar de manera adecuada conjuntos pequeños de alternativas. En este trabajo, se parte de la idea que el problema de ordenamiento se puede formular como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo, donde primeramente se crean clases de alternativas y a partir de ellas, se deducen las relaciones de preferencias entre dichas clases. Respecto a ello, Fernández et al. (2010), señalan que la dificultad de los problemas de optimización combinatoria multiobjetivo aumenta exponencialmente con el número de grupos de alternativas y cuando esto sucede, es recomendable utilizar una metaheurística para obtener el frente de Pareto del problema. En ese mismo sentido, Coello, Van Veldhuizen y Lamont (2007), consideran que es deseable utilizar

[14] En la propuesta de Fernández et. al (2008), se utilizó el algoritmo Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II) para la explotación de la relación de sobreclasificación valuada.

algoritmos evolutivos para este tipo de problemas, debido a que esta clase de algoritmos pueden ser útiles para manejar la complejidad exponencial en comparación con las técnicas tradicionales.

En ese sentido, Ferligoj (1997), Baroudi y Safia (2010) coinciden que el problema de agrupamiento se puede abordar de las siguientes maneras:

- Reduciéndolo a un problema de agrupamiento con un sólo criterio obtenido como una combinación de los criterios propuestos.

- Utilizando algoritmos de agrupamiento restringidos, donde un criterio seleccionado es considerado como el criterio de agrupamiento y los otros determinan las restricciones.

- Mediante el consenso de técnicas de clustering sobre los agrupamientos generados por un algoritmo mono-criterio para cada criterio.

- Mediante el uso (o creación) de algoritmos directos.

En los trabajos de (Ferligoj y Batagelj, 1992; Handl y Knowles, 2007; Nemery de Bellevaux, 2006), se coincide que el problema de agrupamiento puede ser visto como un problema de optimización de un solo objetivo, el cual puede ser formalmente definido de la siguiente manera:

$$P(C^*) = \min_{C \in \Omega} P(C) \tag{7}$$

donde:

- C es agrupamiento de un conjunto de datos A
- Ω es el conjunto de los agrupamientos factibles
- $P : \Omega \rightarrow \Re$ es la función criterio (interna). Siembre está basada en la noción de similaridad o (dis)similaridad entre los datos.

En ese mismo sentido Ferligoj y Batagelj (1992) y Handl y Knowles (2007), consideran que un enfoque mejor al anterior podría ser la consideración del agrupamiento como un problema de

optimización multiobjetivo; el cual para el problema $(\Omega, P_1, P_2, .., P_m)$, el objetivo de determinar el agrupamiento óptimo o deseable C^* puede ser definido formalmente como:

$$P_t(C^*) = \min_{C \in \Omega} P_t(C), t = 1,..,m \tag{8}$$

donde:

- C es un agrupamiento de un conjunto de datos A
- Ω es el conjunto de todos los posibles agrupamientos
- $P_t : t = 1,...,m$, es un conjunto de m diferentes funciones mono-objetivo.

Aquí se busca quedarse con el conjunto de grupos que sean menos (dis)similares; ya que al estar minimizando, se desea que no queden tan lejanos los agrupamientos. Es decir, que sean lo más parecidos. Si se maximiza el número de grupos, sucede que habría más particiones y se desea que no sean demasiadas, pero que tampoco sean pocas. Como se mencionó, los objetivos a perseguir son contradictorios entre sí.

Con lo presentado sobre el problema de clustering y expuesto sobre el problema de clustering ordenado (De Smet et al. (2012); Fernández et al. (2010); Rocha et al. (2012); Rocha y Dias (2013)), se puede deducir que esté último está estrechamente relacionado al problema de ranking multicriterio. Máxime si se apega a la definición del problema del ranking multicriterio, que consiste en dividir un conjunto de alternativas en clases de equivalencias parcialmente o totalmente ordenadas (Roy, 1996). De manera puntual, un orden parcial obtenido del proceso de ranking, proporciona una aproximación a la idea del problema del clustering multicriterio ordenado. Por tanto, adoptando tal definición, el problema del clustering multicriterio ordenado puede ser visto como un caso particular del problema del ranking.

Con el enfoque propuesto en este trabajo de investigación, dado un conjunto de alternativas de decisión de tamaño mediano A, se desea dividir ese conjunto en clases generadas automáticamente y obtener una relación de outranking crisp antisimétrica de dichas clases. De esta manera, se busca crear un ranking de clases con una estructura de orden parcial o total, donde las alternativas de decisión dentro de una clase son indiferentes entre sí.

Debido a la naturaleza multiobjetivo y combinatoria que el problema de ranking multicriterio presenta en la fase de explotación de toda relación de outranking valuada, se decidió modelar esta fase como un problema de optimización multiobjetivo combinatorio.

2.10.4. Resumen

Se puede observar que el problema del agrupamiento multicriterio ordenado está estrechamente relacionado al problema de ranking multicriterio. De acuerdo a Roy (1985), el problema del ranking multicriterio consiste en dividir el conjunto de alternativas en clases de equivalencias parcialmente o totalmente ordenadas. Un orden parcial obtenido del proceso de ranking da un acercamiento a la idea del problema del clustering multicriterio ordenado. Adoptando tal definición, el problema del clustering multicriterio ordenado puede ser visto como un caso particular del problema del ranking.

El enfoque de este proyecto de investigación, consiste en dividir un conjunto de alternativas de decisión de tamaño mediano en k clases y así mismo, obtener una relación de sobreclasificación crisp antisimétrica de las clases determinadas. De esta manera, se busca derivar un ranking de clases con una estructura de orden parcial o total, donde las alternativas de decisión dentro de una clase son indiferentes entre sí.

Debido a la naturaleza multiobjetivo y combinatoria que el problema de ranking multicriterio presenta en la fase de explotación de toda relación de sobreclasificación valuada, se considera que es deseable modelar esta fase como un problema de optimización multiobjetivo combinatorio. Una propuesta para tratar de solucionar este tipo de problemas, es la utilización de algoritmos evolutivos multiobjetivo, ya que estos han sido diseñados para trabajar de manera eficaz con instancias (o poblaciones) de datos de gran tamaño. En este sentido, el enfoque de este proyecto de investigación, propone integrar la partición y la relación de las clases en el ciclo de vida de un algoritmo evolutivo multiobjetivo y obtener como resultado, una partición del conjunto de alternativas de decisión en un conjunto de clases y una relación sobreclasificación crisp antisimétrica de tal partición.

Capítulo 3 . Metodología de la investigación

En este capítulo se presenta el método que se utilizó para dar respuesta a las preguntas planteadas y a la interrogante central de la investigación. De primera instancia, a manera de marco de referencia, se advierten las metodologías de investigación. Posteriormente, se plantea la estrategia de investigación utilizada, el tipo de investigación, las consideraciones para su aplicación, entre otros elementos. Además, se expone lo referente a la investigación de campo que atañe al diseño de la investigación, el modelo experimental, la estrategia de aplicación del método de ordenamiento multicriterio propuesto en este trabajo.

3.1. Estrategia de investigación

Por estrategia se entiende en el ámbito general, como un plan de acción para lograr un objetivo a largo plazo o en general (Oxford, 2010). En ese sentido, para lograr lo planteado en esta investigación, se desarrolló un método basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos para abordar el problema de ordenamiento multicriterio de conjuntos de alternativas de tamaño mediano, el cual incorpora enfoques flexibles de modelación de preferencias con el fin de apoyar la decisión de los tomadores de decisiones, a partir de soluciones más consistentes que las que presentan técnicas similares. A continuación, se presenta la estrategia empleada en la investigación.

3.1.1. Metodología empleada en la investigación

La metodología empleada en esta investigación es de corte *cuantitativo*, enriquecido con un estudio de caso. El proceso de investigación estuvo basado en el modelo de decisión de Simon (1947), utilizando el enfoque constructivo del de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, como se describe en Tsoukias (2007).

Respecto a la temporización de los enfoques cualitativo y cuantitativo, ésta fue llevada a cabo en *fases* y no de manera concurrente. Es decir, primeramente se realizó de forma cuantitativa con la elaboración y prueba del MOEA-POSET utilizando datos simulados. Posteriormente, una vez que los resultados que produjo el método fueron convincentes, se procedió a llevar a cabo el estudio de caso. La Figura 3.1, muestra el modelo general del abordaje de la investigación.

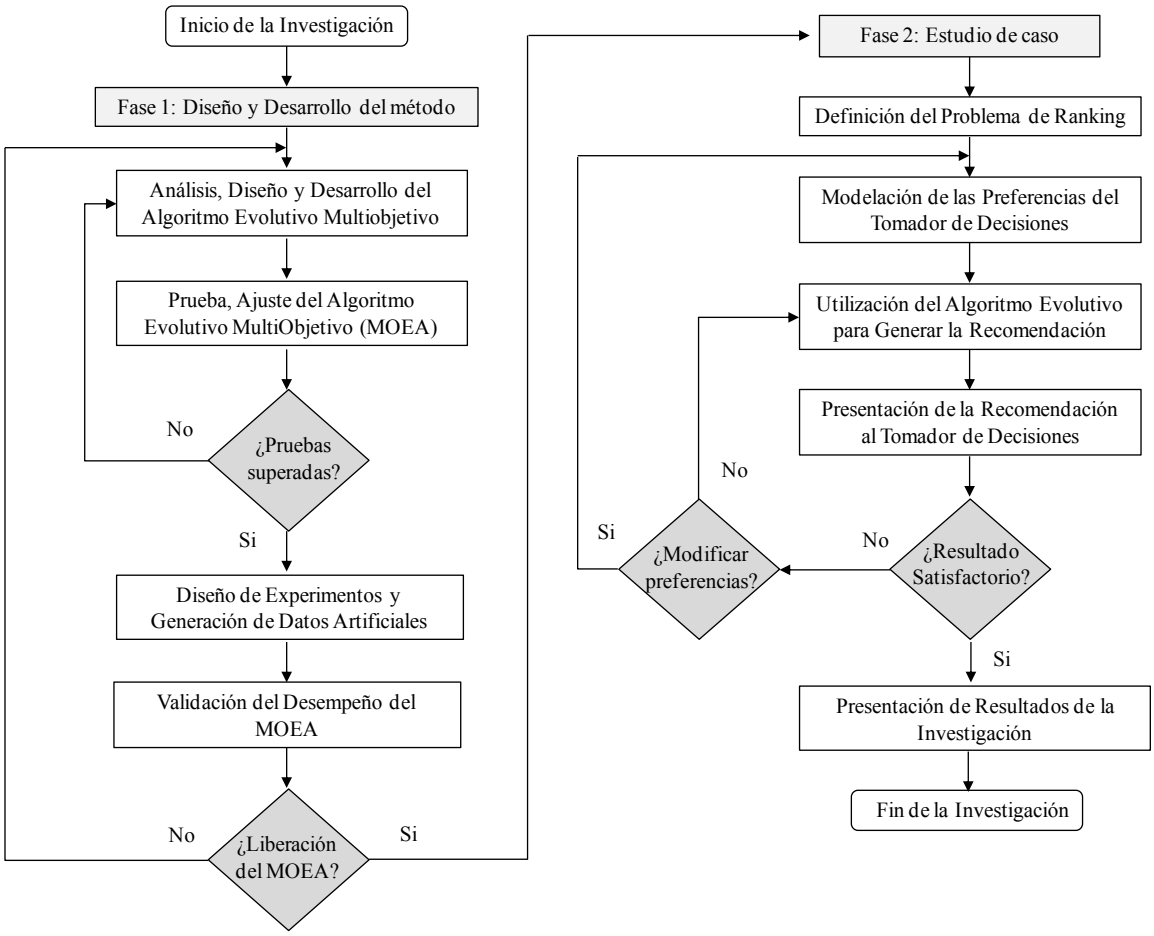


Figura 3.1**.** Modelo para el abordaje general de la investigación.
Fuente: Elaboración propia.

3.1.2. Tipo de investigación

El tipo de investigación para un trabajo en particular, como ya se mencionó, puede clasificarse de diferentes maneras. Si se toma en cuenta el objetivo de la investigación, la presente fue de tipo *básica*, ya que consistió en un trabajo original experimental, cuyo objetivo, además del algoritmo, fue obtener nuevos conocimientos sobre el problema del ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano y de los hechos observables en la realidad. Lo anterior sin dirigirse a una aplicación o utilización determinada al inicio de la investigación. Sin embargo, esta puede servir de base para investigaciones aplicadas futuras, cuyos objetivos son prácticos específicos.

Por otra parte, si se considera la fuente de información, el tipo de investigación fue primordialmente *experimental*, ya que se utilizaron datos resultantes de la reproducción artificial para el problema de ordenamiento multicriterio, a través de las variables que están inmersas en él. Así mismo, tomando como base que una vez que el algoritmo fue ajustado y que presentó resultados coherentes a la información de entrada. Se llevó a cabo el estudio de caso, haciendo con ello a esta investigación, en un segundo momento, como de *campo*.

En el mismo sentido y tomando como referencia el alcance y nivel de profundidad, esta investigación fue de tipo *correlacional* porque se buscó conocer cuál es una manera efectiva de integrar y utilizar las funcionalidades combinadas del enfoque del análisis multicriterio para la toma de decisiones, el enfoque de optimización multiobjetivo combinatorio y la técnica de algoritmos evolutivos multiobjetivos para ayudar a resolver el problema en cuestión.

A manera de resumen, la Tabla 3.1 muestra los tipos de investigación en los que se puede ubicarse clasificar este trabajo.

Tabla 3.1. Tipo de investigación del trabajo de investigación

Clasificación General	Tipo
Por su objetivo de la investigación	Básica
Por la fuente de información	Experimental
Por su alcance y nivel de profundidad	Exploratorio-Correlacional
Por la forma de acercamiento al objeto de estudio	Cuantitativa

Fuente: Elaboración propia.

3.1.3. Consideraciones para su aplicación

Además de seguir los pasos de la metodología cuantitativa en el desarrollo y prueba del algoritmo evolutivo; al momento de trabajar con el estudio de caso con decisores reales, se utilizó el modelo de decisión de Simon (1947) y el denominado enfoque *constructivo*. En este enfoque se contempla la figura de un analista que apoya al decisor a construir sus propios modelos de racionalidad con base a sus respuestas a las preguntas relacionadas con sus preferencias. Tal interacción, es parte del proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios que permite construir la representación del problema del tomador de decisiones y anticipar, en cierta

medida, su solución. Modelar bajo este enfoque, consiste en construir un modelo con la persona que está siendo apoyada a decidir. Dicho modelo es adecuado para ese tomador de decisiones eventual y su contexto particular (Tsoukias, 2007). Este enfoque constructivo es iterativo, por lo que si la solución presentada al tomador de decisiones no corresponde a sus preferencias, es posible regresar a etapas de la modelación y volver a repetir el proceso.

3.1.4. Criterios de validez

Debido a que en este trabajo se utilizaron datos aleatorios generados artificialmente con programas de cómputo, fue necesario definir un criterio de validez para evaluar el desempeño del algoritmo evolutivo multiobjetivo para probar la validez de sus resultados obtenidos.

De primera instancia, se decidió abordar la relación de sobreclasificación valuada como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo; donde se contempla la existencia de conjunto finito de alternativas de decisión A, una relación de sobreclasificación valuada $aS_A^{\sigma}b$ definida sobre AXA con imagen en $[0,1]$, - que puede ser interpretada como el grado de credibilidad del predicado "a es al menos tan buena como b" -, y un nivel de corte λ tal que si $aS_A^{\sigma}b \geq \lambda$, se dice que a sobreclasifica a b con credibilidad λ, denotado por $aS_A^{\sigma}b$. De otra manera, la sobreclasificación es rechazada $anS_A^{\sigma}b$.

Tomando en cuenta lo anterior, supóngase que E una forma de explotar una relación de sobreclasificación valuada S_A^{σ}, que $S^*_{P_k(A)}$ es una relación de sobreclasificación crisp de clases de alternativas generada por E y que R_A es el preorden parcial de alternativas derivado de aplicar E sobre S_A^{σ}. Es decir, E es una función asignando un preorden parcial R_A a cada S_A^{σ} definida sobre AXA. El ranking R_A define un preorden parcial R sobre A. Más claramente, para todas las alternativas a, b y c que pertenecen a la relación AXA, se tiene que aR_Aa por reflexividad y si aR_Ab y bR_Ac entonces aR_Ac por transitividad. Un preorden parcial se admite la posibilidad de que algunos pares de alternativas sean incomparables entre sí. En este trabajo se

considera que la calidad R_A debería juzgarse de acuerdo al número de discrepancias y concordancias con S_A^{σ} y la relación de sobreclasificación crisp de clases de alternativas $S^*_{P_k(A)}$.

Aquí, se considera que un método efectivo para generar un ranking de un conjunto de alternativas donde existen algunas indiferentes entre sí, no debería cambiar la indicación del orden de preferencia entre pares de alternativas diferentes en una relación de sobreclasificación valuada sin ciclos, incomparabilidades e indiferencias entre alternativas. Es decir, el ordenamiento de las alternativas obtenido cuando el algoritmo evolutivo explota una relación sobreclasificación valuada debe ser coherente con el modelo de agregación de las preferencias representadas por dicha relación.

Por último, respecto a la realización del estudio de caso utilizado como prueba piloto, donde un tomador de decisiones estuvo implicado. Este tomador de decisiones no tuvo relación con la investigación, pero tiene experiencia empírica en la toma de decisiones, pues es un directivo de primer nivel de una empresa que otorga créditos en a productores agrícolas. La información sobre sus preferencias y su nivel de aceptación de los resultados fue obtenida a través de la interacción con el analista, que en este caso fue el autor de este trabajo de tesis y que le apoyó en el proceso de modelación de sus preferencias.

3.2. Investigación experimental

Como se reportó en apartados anteriores, el tipo de investigación realizado fue de tipo *experimental*. Este tipo de investigación tiene lugar en un laboratorio; donde la mayor ventaja es el grado de control que proporciona. En un experimento, cada participante es expuesto al mismo medio ambiente, los mismos experimentos y las mismas instrucciones (Varderstoep y Johnston, 2009). A continuación se presenta el diseño de esta investigación experimental.

3.4.1. Diseño de la investigación experimental

El diseño de esta investigación se puede dividir en dos partes: la primera tiene relación con el diseño del algoritmo evolutivo multiobjetivo y un paso final para obtener una recomendación.

Mientras que la segunda, es con referencia a las pruebas realizadas al mismo. En los apartados siguientes se analizan ambas partes:

3.4.1.1. Primera parte: el algoritmo evolutivo multiobjetivo y la recomendación

Diversos métodos han sido propuestos para abordar el problema de ordenamiento como un problema de optimización multiobjetivo (Leyva y Araoz, 2013). Aquí, el uso del término ordenamiento multicriterio, se refiere a los métodos basados en un procedimiento asimétrico, en el sentido de determinar una partición jerárquica, es decir, una relación antisimétrica sobre las clases de alternativas, la cual optimiza simultáneamente diversos objetivos.

En ese sentido, el problema de ordenamiento multicriterio puede ser visto como un caso especial de problema de optimización multiobjetivo. La estrategia para abordar el problema de ordenamiento consistió de dos partes: la primera, fue la creación del Algoritmo Evolutivo MultiObjetivo (MOEA) para obtener una particionamiento del conjunto de alternativas. La segunda, tiene relación con un procedimiento para derivar el ordenamiento de las clases obtenidas en la partición (este procedimiento genera un POSET). Por lo anterior, el enfoque aquí presentado se denomina: MOEA-POSET[15]. A continuación se presenta la estrategia para resolver instancias del problema de ordenamiento de un conjunto de alternativas de tamaño mediano a través del MOEA-POSET.

3.4.1.1.2. Funcionamiento general del algoritmo evolutivo multiobjetivo (MOEA)

Al referirse al problema de agrupamiento relacional, es decir, donde existe una relación de preferencia entre las clases, se hace alusión a un preorden parcial. Donde para un conjunto de alternativas $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ evaluadas por un conjunto de criterios $G=\{g_1,g_2,...,g_n\}$, se obtiene un ordenamiento de clases, cada uno de ellos conteniendo un número de alternativas que son indiferentes entre sí al interior de cada clase y no indiferentes, a los pertenecientes a otras clases (ver Figura 3.2).

[15] En lo sucesivo, cuando en el documento se refiera al término MOEA, se hace alusión solamente al algoritmo evolutivo multiobjetivo que genera la relación de sobreclasificación crisp de clases de alternativas. En cambio, cuando se refiera a MOEA-POSET, se hace alusión al método completo que genera el ranking de clases de alternativas.

En esta investigación el objetivo fue diseñar y desarrollar un Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo y que permita obtener un preorden parcial de alternativas o visto de otra manera, un orden parcial de clases de alternativas.

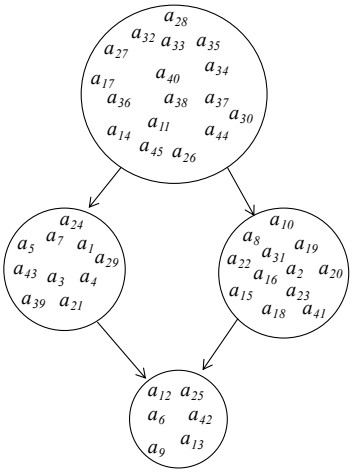


Figura 3.2. Preorden parcial de un conjunto de alternativas.
Fuente: Elaboración propia.

3.4.1.1.2.1. Comparando alternativas y clases de alternativas

En este apartado se presenta una forma general en la cual las alternativas y clases de alternativas pueden ser comparadas unas con otras y posteriormente, modelar los objetivos del ordenamiento.

Cada solución potencial en la población del algoritmo evolutivo, está asociada con un valor de lambda (λ), el *nivel de corte*, que toma valores en el intervalo de cero a uno ($0 \leq \lambda \leq 1$). Para cada nivel de corte λ, se puede inducir una relación de sobreclasificación crisp S_A^{λ}. En esa relación S_A^{λ}, se pueden deducir las siguientes relaciones de preferencia:

- Indiferencia. $a_i I a_j \quad \leftrightarrow \quad \sigma(a_i, a_j) \geq \lambda \wedge \sigma(a_j, a_i) \geq \lambda$
- Preferencia. $a_i P a_j \quad \leftrightarrow \quad \sigma(a_i, a_j) \geq \lambda \wedge \sigma(a_j, a_i) \leq \lambda - \beta$
- Incomparabilidad. $a_i R a_j \quad \leftrightarrow \quad \sigma(a_i, a_j) \leq \lambda - \beta \wedge \sigma(a_j, a_i) \leq \lambda - \beta$

donde λ es un nivel de corte constante y β es un nivel de umbral que indica los valores mínimos que un tomador de decisiones puede aceptar que " a_i sobreclasifica a a_j " $(a_i S_A^{\lambda} a_j)$.

Sea $P_k(A)=\{C_1,C_2,...,C_k\}$ una partición del conjunto de alternativas A. S_A^{λ} induce a una relación de sobreclasificación crisp antisimétrica $S^*_{P_k(A)}$ entre las clases determinadas de la siguiente manera:

Para cada par de clases (C_r, C_q), $r,q=1,2,...,k$ se calcula

$$l^*_{rq}=\begin{cases}\arg\max_{l_{rq}\in\{2,3,4\}}(\sum_{a_i\in C_r}\sum_{a_j\in C_q}\chi_{l_{rq}}(a_i,a_j) & si \quad r\neq q\\ 1 & si \quad r=q\end{cases} \tag{10}$$

donde

$$\chi_{l_{rq}}(a_i,a_j)=\begin{cases}1 & si \quad (a_i,a_j)\in O\\ 0 & de\ otra\ manera\end{cases} \quad \forall a_i,a_j\in A, O\in\{I,P^+,P^-,R\}$$

y l^*_{rq} representa la relación de preferencia crisp entre las clases C_r y C_q $(2\rightarrow P^+_{P_k(A)}, 3\rightarrow P^-_{P_k(A)}, 4\rightarrow R_{P_k(A)})$. Donde $P^+_{P_k(A)}, P^-_{P_k(A)}, R_{P_k(A)}$ son las relaciones de preferencias entre clases "estrictamente preferida a", estrictamente preferida por", e "incomparable a" respectivamente. De Smet y Eppe (2009), prueban que este procedimiento conduce a la relación de sobreclasificación crisp óptima $S^*_{P_k(A)}$ sobre tal partición $P_k(A)=\{C_1,C_2,...,C_k\}$ de A. Al construir $S^*_{P_k(A)}$, ésta cumple con las propiedades de reflexividad y antisimetría.

La técnica utilizada en este enfoque requiere una medida de distancia para ser utilizada. En este caso, se adoptó la medida propuesta por De Smet y Eppe (2009), la cual mide la distancia entre dos alternativas utilizando sus perfiles.

Considérese una relación de sobreclasificación crisp S_A^{λ}, donde para cualquier par de alternativas (a_i,a_j), una de las siguientes relaciones podría se deducida: Indiferencia $a_i I_A a_j$, preferencia $a_i P_A a_j$, $a_j P_A a_i$ o Incomparabilidad $a_i R_A a_j$. De esas relaciones deducidas, cada

alternativa $a_i \in A$ puede ser caracterizada por el perfil $Q(a_i) = \{Q_1(a_i), Q_2(a_i), Q_3(a_i), Q_4(a_i)\}$. En $Q(a_i)$, $Q_1(a_i)$ es el conjunto de todas las alternativas indiferentes a a_i, $Q_2(a_i)$ es el conjunto de todas las alternativas preferidas por a_i, $Q_3(a_i)$ es el conjunto de todas las alternativas preferidas a a_i y, $Q_4(a_i)$ es el conjunto de todas las alternativas incomparables a a_i. Entonces, la distancia entre dos alternativas $a_i, a_j \in A$ está definida de la siguiente manera:

$$dist(a_i, a_j) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{4} | Q_k(a_i) \cap Q_k(a_j) |}{| A |} \tag{11}$$

3.4.1.1.2.2 Funciones objetivo

Objetivo nivel de corte λ

A partir de la relación de sobreclasificación valuada S_A^σ, es posible definir una familia anidada de relaciones de sobreclasificación crisp S_A^λ, es decir, $S_A^\lambda = \{(a,b) \in AxA : S(a,b) \geq \lambda\}, \quad \lambda \in [\lambda_0, 1]$. Esas relaciones crisp corresponden a niveles de corte (λ-cuts) de S_A^σ, donde dicho nivel de corte λ representa el valor mínimo de S_A^σ para el cual $aS_A^\lambda b$ es verdadero. La Figura 3.3 muestra una familia anidada de relaciones de sobreclasificación crisp S_A^λ, generada a partir de diferentes niveles de corte λ**,** sobre una relación de sobreclasificación valuada S_A^σ. Ver a Fodor y Roubens (1994) para mayor detalle.

Cada solución potencial está asociada a un λ-cut, el cual está conectado al nivel de credibilidad de una relación de sobreclasificación crisp S_A^λ definida sobre un conjunto de alternativas A. Es deseable tener soluciones potenciales para los cuales, el nivel de credibilidad λ este cercano a 1. Esto indica que el ordenamiento obtenido a partir de la solución potencial decodificada con nivel de credibilidad λ es más creíble. Este objetivo, es aquí denominado como el *objetivo de nivel de corte máximo.*

	a1	a2	a3	a4
a1	1.00	0.90	0.85	0.76
a2	0.60	1.00	0.46	0.70
a3	0.23	0.74	1.00	0.63
a4	0.65	0.41	0.89	1.00

S_A^{σ}

	a1	a2	a3	a4
a1	1	1	1	1
a2	1	1	0	1
a3	0	1	1	1
a4	1	0	1	1

$S_A^{\lambda = 0.60}$

	a1	a2	a3	a4
a1	1	1	1	1
a2	0	1	0	0
a3	0	0	1	0
a4	0	0	1	1

$S_A^{\lambda = 0.75}$

	a1	a2	a3	a4
a1	1	1	0	0
a2	0	1	0	0
a3	0	0	1	0
a4	0	0	0	1

$S_A^{\lambda = 0.90}$

Figura 3.3. Familia anidada de relaciones de sobreclasificación crisp.
Fuente: Elaboración propia.

En el MOEA, se utiliza una condición interna para el nivel de credibilidad λ. Esta condición está integrada en la función objetivo de nivel de corte máximo y recibe el nombre de función f [16]. Esta función f no permite que los valores de λ se acerque a 1, porque ante esa situación, se aumentaría el número de incomparabilidades (ver Figura 3.3). Esta función f está definida de la siguiente manera:

$$f(\tilde{p}) = \left| \begin{Bmatrix} (a_{k_i}, a_{k_j}) : a_{k_i} \sim S a_{k_j} \quad y \quad a_{k_j} \sim S a_{k_i} \quad ; \\ i = 1,2,...,m-1,\ j = 2,3,...,m,\ i < j \end{Bmatrix} \right| \tag{12}$$

donde $f(\tilde{p})$ es el número de incomparabilidades entre pares de acciones (a_{k_i}, a_{k_j}) en el individuo $\tilde{p} = a_{k_1} a_{k_2} ... a_{k_m}$ de la población del MOEA, en el sentido de la relación crisp S_A^{λ}. Nótese que la calidad de una solución se incrementa con el decrecimiento del valor de f. En este caso, se tiene interés en aquellos individuos cuyos valores de f sean igual o cercanos a cero. Esta condición mejora la comparabilidad de S sobre A.

El objetivo MinCut

Se parte de la idea de que, en la medida de lo posible, las alternativas que se encuentran dentro de una clase determinada, deben ser indiferentes entre sí. Por tanto, el *MinCut* mostrado en la ecuación (13), consiste en *maximizar* la indiferencia al interior de las clases. Aquí, se procede a penalizar los pares de alternativas que al interior de las clases no son indiferentes.

[16] f forma parte de la función objetivo de nivel de corte máximo y no se considera como una función objetivo adicional.

$$MinCut = \sum_{m=1}^{k} Assoc(C_m) \tag{13}$$

donde

$$assoc(G) = \sum_{i \in G} \sum_{j \in G} \eta_{ij} \tag{14}$$

En la ecuación (13), k es el número de clases y, en (14) η_{ij} es la función característica η, la cual está definida como:

$$\eta_{ij} = \eta(a_i, a_j) = \eta(a_i I a_j) = \begin{cases} 0 & if \quad (a_i, a_j) \in I \\ 1 & , \quad de\ otra\ manera \end{cases} \forall a_i, a_j \in A \tag{15}$$

Esta función objetivo es minimizada en el correspondiente problema de optimización multiobjetivo. Este objetivo es llamado el *objetivo MinCut*.

El objetivo de desacuerdos de preferencia entre pares mínimo

Sea $P_k(A) = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$, una partición de A. Supóngase que $C_i O C_j$, donde $O \in \{P_A^+, P_A^-, R_A\}$. Supóngase que $C_i P_{P_k(A)}^+ C_j$, es natural que al inicio del procedimiento, algunos pares de alternativas (a_r, a_s), $a_r \in C_i, a_s \in C_j$ no estén en concordancia con (C_i, C_j), es decir, mientras que $C_i P_{P_k(A)}^+ C_j$ en $S_{P_k(A)}^*$, sucede $a_r I_A a_s$ o $a_r P_A^- a_s$ o $a_r R_A a_s$ en S_A^λ. En esas condiciones, se tiene una *inconsistencia* entre el modelo de agregación de preferencias S_A^λ y la relación de sobreclasificación crisp de clases.

La calidad de la relación de sobreclasificación crisp final $S_{P_k(A)}^*$, debería ser juzgada de acuerdo al número de sus discrepancias y concordancias con S_A^σ y la relación de sobreclasificación crisp S_A^λ. Sea V el conjunto de discrepancias fuertes definida como:

$$V = \{(a_r, a_s) \in AxA : a_r \in C_i, a_s \in C_j, a_r O_1 a_s, C_i O_2 C_j, \quad (16)$$
$$O_1 \in \{I_A, P_A^+, P_A^-, R_A\}, O_2 \in \{P^+_{P_k(A)}, P^-_{P_k(A)}, R_{P_k(A)}\}, O_1 \neq O_2,$$
$$i, j = 1,2,...,k\}$$

y $n_V = Cardinalidad\ de\ V = |V|$.

Nótese que O_1 y O_2 son relaciones de preferencia en diferentes conjuntos de alternativas y que $O_1 \neq O_2$ significa que no hay concordancia entre las relaciones de preferencia $a_r O_1 a_s$ en S_A^λ y $C_i O_2 C_j$ en $S^*_{P_k(A)}$. n_V es una función, la cual cuenta el número de desacuerdos de preferencia entre pares.

Aquí, se cuantifica el número de preferencias entre alternativas en la relación de sobreclasificación crisp S_A^λ que están en desacuerdo en el sentido de $S^*_{P_k(A)}$. A este objetivo se le denomina el *objetivo de Desacuerdos de Preferencia entre Pares*.

Basados en esos objetivos definidos, el problema de optimización multiobjetivo que el algoritmo evolutivo pretende resolver es el siguiente:

$$Max(\lambda(\tilde{p})), \quad Min(MinCut(\tilde{p})), \quad Min(n_V(\tilde{p})) \quad (17)$$
$$Sujeto\ a:$$
$$\tilde{p} \in \Omega$$
$$\lambda \in [0,1], \quad \lambda \geq \lambda_0$$

donde

λ es la función objetivo de nivel de corte máximo

$MinCut$ es la función objetivo que cuenta el número de incomparabilidades al interior de las clases de alternativas.

n_V es la función objetivo de desacuerdos de preferencia entre pares mínimo.

Ω es el conjunto de relaciones de sobreclasificación crisp antisimétricas de clases de alternativas de A.
$\tilde{p}$ es una relación de sobreclasificación crisp antisimétrica de clases de alternativas de un conjunto de elementos A.
λ_0 es un nivel mínimo de nivel de credibilidad.

Usualmente no hay una sola mejor solución para esta tarea de optimización. En su lugar, el marco o framework de optimalidad de Pareto es alcanzado.

3.4.1.1.2.3. Procedimiento para la asignación de la adaptación de los individuos

La mayoría de los enfoques de toma de decisiones multiobjetivo buscan el conjunto óptimo de Pareto completo P^*, el cual en el argot de los algoritmo evolutivos multiobjetivos, es frecuentemente denotado como $P_{verdadero}$ (Coello *et* al., 2007). Durante la ejecución del MOEA, un conjunto de soluciones Pareto óptimo "actual" es determinado en cada generación del algoritmo evolutivo y es llamado $P_{actual}(t)$, donde t representa el número de generación. Diversas implementaciones de algoritmos evolutivos multiobjetivos, utilizan además una población secundaria, almacenando las soluciones no dominadas encontradas a través de las generaciones. Esta población es llamada $P_{conocido}(t)$. Este término es también anotado por t, para reflejar los posibles cambios en la composición durante la ejecución del MOEA. $P_{conocido}(0)$ es definido como el conjunto vacío ϕ y, $P_{conocido}$ como sólo el conjunto final de soluciones retornado por el MOEA al finalizar su ejecución. $P_{actual}(t)$, $P_{conocido}$ y $P_{verdadero}$ son conjuntos de los genotipos del MOEA. Cada fenotipo de los correspondientes conjuntos, forman un frente de Pareto aproximado. EL frente de Pareto aproximado para cada uno de esos conjuntos de soluciones es llamado $PF_{actual}(t)$, $PF_{conocido}$ y $PF_{verdadero}$, respectivamente.

La mayoría de los métodos basados en algoritmos evolutivos multiobjetivos, intentan evolucionar una población hacia el frente de Pareto verdadero $PF_{verdadero}$. Es objetivo es, que al final de la ejecución, $P_{current} = P_{true}$, $P_{current} \subset P_{true}$ o

$$\left\{\begin{matrix} \bar{u}_i \in PF_{actual}, \bar{u}_j \in PF_{verdadero} \\ : \forall i, \forall j \quad \min[distancia(\bar{u}_i, \bar{u}_j)] < \varepsilon \end{matrix}\right\} \tag{18}$$

donde la distancia está definida por alguna norma.

Para resolver el problema de ordenamiento multicriterio utilizando un MOEA, no es necesario buscar en todo el *conjunto óptimo de Pareto* $P_{verdadero}$ o el frente de Pareto asociado $PF_{verdadero}$, debido al hecho de que muchas de las soluciones no dominadas, no son de interés para el tomador de decisiones. Aquí, se utiliza la estrategia de tratar de encontrar en cada generación del algoritmo, las soluciones más prominentes y atractivas para el tomador de decisiones, las cuales en este caso, son aquellos individuos $\tilde{p}(MinCut, n_V)$ cuyos valores de $MinCut, n_V$ son cercanos a un valor de cero y, tienen un suficientemente alto valor de λ. Es suficiente buscar un *conjunto óptimo de Pareto restringido*, el cual para el propósito de esta investigación, está definido como:

$$P_{verdadero}^{restringido} = \left\{\begin{matrix} \tilde{p} \in P_{verdadero} : \left\|(MinCut(\tilde{p}), n_V(\tilde{p}))\right\|_\infty \leq \varepsilon, \\ donde\ \varepsilon\ es\ un\ número\ pequeño\ no\ negativo, \quad \lambda > 0.5 \end{matrix}\right\} \tag{19}$$

Basado en esa estrategia, el método propuesto trata de evolucionar hacia el *frente de Pareto restringido* $PF_{verdadero}^{restringido}$, por medio de una sucesión del subconjunto de soluciones no dominadas $PF_{actual}^{restringido}(t) = \{P_1(t), P_2(t), ..., P_n(t)\}$. En cada generación, el método calcula las soluciones no dominadas para el problema de ordenamiento que están más cercanas al nivel de aspiración fijo $(MinCut, n_V)$, con $MinCut(\tilde{p}) = 0$ y $n_V(\tilde{p}) = 0$ de acuerdo a la métrica de Tchebycheff.

Pasos generales para la asignación de la adaptación

Para asignar el grado de adaptación de un individuo de una población de una generación cualquiera, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1:

Sea N el tamaño de la población.

- Elegir un σ_{share} (un proceso actualizado dinámicamente para fijar σ_{share} es descrito en el paso 5).
- Inicializar $\lambda_j = c_j$ (c_j es elegido aleatoriamente entre 0 y 1) y, $\mu(j) = 0$ para todos los posibles ranks $j = 1,2,...,N$. Fijar el contador de solución $i = 1$.

Paso 2.

- Calcular el número de soluciones n_i que dominan a la solución i.
- Calcular el rango de la $i-ésima$ solución como $r_i = 1 + n_i$.
- Incrementar en uno el contador del número de soluciones en el rango r_i, a través de $\mu(r_i) = \mu(r_i) + 1$.

Paso 3.

- Si $i < t$, incrementar i en uno e ir al paso 2. En caso contrario, ir al paso 4.

Paso 4. Identificar el rango máximo

- Identificar el rango máximo r^*, verificando el rango r_i más grande tal que $\mu(r_i) > 0$. Ordenar con base en el rango r_i y promediando la adaptabilidad (fitness), conduce a la siguiente adaptabilidad promedio F_i para cualquier solución $i = 1,2,..,N$:

$$F_i = N - \sum_{k=1}^{r_i - 1} \mu(k) - 0.5(\mu(r_i) - 1) \tag{20}$$

A cada solución i con rango $r_i = 1$, la ecuación (19) asigna un fitness, igual a:

$$F_i = N - 0.5(\mu(1) - 1) \tag{21}$$

el cual es el valor promedio de $\mu(1)$ enteros consecutivos desde N hasta $N - \mu(1) + 1$.

- Establecer un contador de rango $r = 1$

La Figura 3.4 muestra un ejemplo de los rangos de individuos de una población p_i en una generación i en particular.

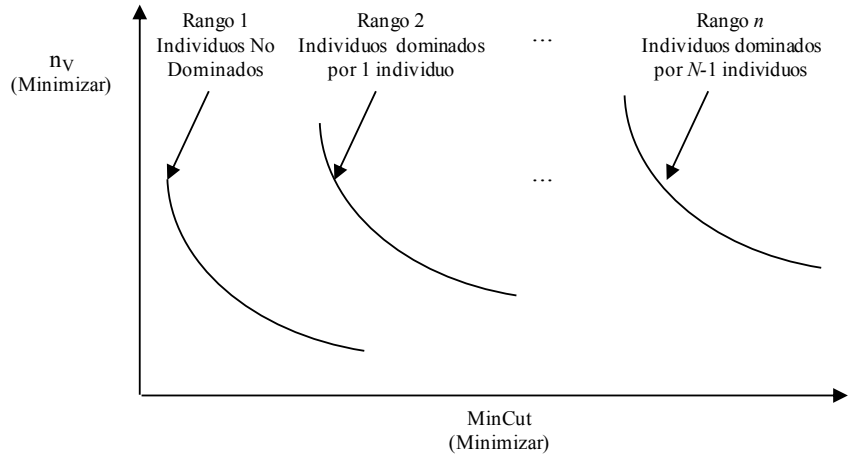


Figura 3.4. Rangos de individuos de una población para una generación determinada.
Fuente: Elaboración propia.

Paso 5.

- Para cada solución i en el rango r, calcular la distancia dc_i a través de la ecuación siguiente:

$$dc(P_i^r) = dc_i = \begin{cases} \| P_i^r \|_\infty \big/ \sigma_{share}^r & , si \| P_i^r \|_\infty > \sigma_{share}^r \\ 1 & , de\ otra\ manera \end{cases} \tag{22}$$

donde $\sigma_{share}^r = \| P^{CM(r)} \| = Centro\ de\ Masa\ del\ conjunto\ \ P^{(r)} = \{P_1^r, P_2^r, .., P_{\mu(r)}^r\}$ es el conjunto de soluciones del rango r. El *Centro de Masa* de un grupo de puntos, es definido como la media ponderada de las posiciones de los puntos. Donde el peso aplicado a cada punto, es la *masa del punto*. $\| \bullet \|_\infty$ es la métrica de Holder máxima. Nótese que $P^{(1)} = PF_{actual}^{restringido}$.

- Calcular la adaptabilidad compartida utilizando $F_j^{'} = F_j \big/ dc_j$.

- Escalar adaptabilidad compartida para preservar la misma adaptabilidad promedio, como sigue:

$$F_j^{'} \leftarrow \frac{F_j \mu(r)}{\sum_{k=1}^{\mu(r)} F_k^{'}} F_j^{'} \tag{23}$$

Paso 6.

- Incrementar λ_j por ε' $(\lambda \leftarrow \lambda + \varepsilon')$ mientras $[MinCut(\lambda) = MinCut(\lambda + \varepsilon')]$ y $[f(\lambda) = f(\lambda + \varepsilon')]$, donde f fue definida en el apartado 3.5.1.1.2.3, específicamente en el objetivo Nivel de Corte λ.

Paso 7.

- Si $r < r*$, incrementar r en 1 e ir al paso 5, de otra manera, el procedimiento esta completo.

La Figura 3.5 muestra el centro de masa P^{CM} de un conjunto de soluciones. En ella, la distancia d_∞ entre cualquier par de puntos $P_1(X_1, Y_1)$ y $P_2(X_2, X_2)$, de acuerdo a la norma infinita dada por:

$$d_\infty(P_1, P_2) = Max(|Y_2 - Y_1)|, |X_2 - X_1|) \tag{24}$$

por tanto, cada individuo tiene una cierta distancia respecto al origen. Como anexo, la norma infinita de P esta definida como $\| P \|_\infty$ y, si $P^{CM} = (MinCut^{CM}, n_V{}^{CM})$ entonces $\| P^{CM} \|_\infty = Max(MinCut^{CM}, n_V{}^{CM})$, es decir, el máximo de entre $MinCut^{CM}$ y $n_V{}^{CM}$.

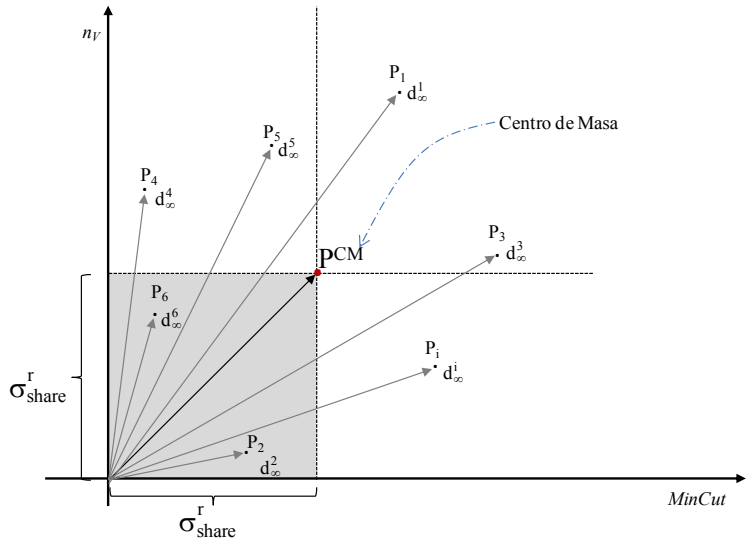


Figura 3.5. Centro de masa de un conjunto de individuos.
Fuente: Elaboración propia basada en Leyva y Aguilera (2005).

En la Figura 3.5, los individuos que están en el recuadro sombreado, son de interés estar más cercanos al origen, lo que significa que el número de inconsistencias entre el modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones y las soluciones generadas por el MOEA son menores, estando más cercanas a la *Región de Interés* (ROI) del tomador de decisiones.

3.4.1.1.2.4. Componentes del MOEA

El algoritmo evolutivo multiobjetivo está basado en una articulación posterior de preferencias, el cual, es capaz de explotar una relación de sobreclasificación valuada, con el propósito de construir una recomendación para el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano. Este algoritmo, toma elementos fundamentales de la propuesta de Fonseca y Fleming (1993). A continuación, se presentan los componentes que forman parte del MOEA, los cuales corresponden a la representación de los individuos de la población en el problema de ordenamiento, la población inicial, y los operadores, este último compuesto por los operadores de selección, cruzamiento y mutación.

3.4.1.1.2.4.1. Representación de los individuos

La representación de los individuos (cromosomas) de la población está basada en la representación de adyacencia basada en Locus (Locus-based Adjacency Representation),

propuesta en Park y Song (1998). Esta representación está basada en grafos, donde cada individuo p consiste en m genes $p_1, p_2, ..., p_m$, donde $m = |A|$ y cada gen p_i puede tomar valores (alelos) j, donde $1 \leq j \leq m$. Un valor de j asignado al gen p_i es interpretado como un enlace de la alternativa i a la j. El conjunto de todas las alternativas enlazadas forman un grafo que puede tener 1 a m componentes conectados. Entonces, cada componente en el grafo resultante es considerado una clase de alternativas formada con todas las alternativas que pertenecen a cada una de ellas. La Figura 3.6, muestra la representación de proximidad basada en locus utilizada en el algoritmo evolutivo multiobjetivo propuesto.

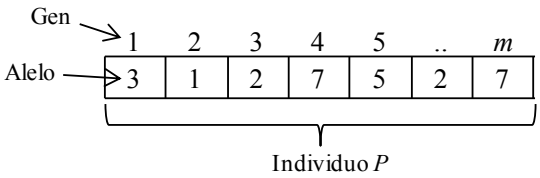


Figura 3.6. Representación de proximidad basada en locus para un individuo p.
Fuente: Elaboración propia.

La decodificación de esta representación requiere de la identificación de todos los componentes conectados. Sin embargo, este esquema de codificación tiene mayores ventajas, la más importante, es que no es necesario fijar el número de clases como parámetro de entrada, ya que este es automáticamente determinado en el paso de decodificación. Por tanto, es posible evolucionar y comparar soluciones con diferente número de clases en una sola ejecución del algoritmo evolutivo. La Figura 3.7 muestra la decodificación de un individuo.

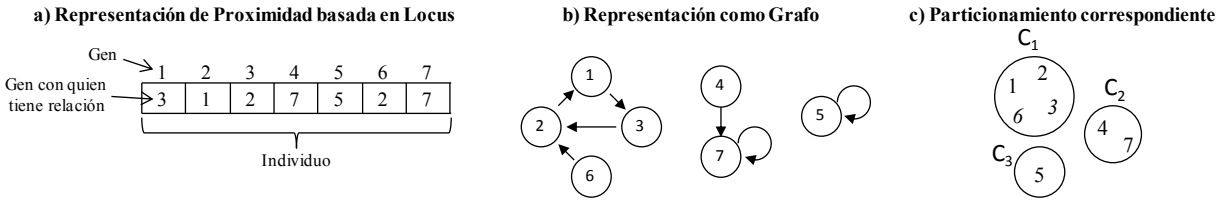


Figura 3.7. Decodificación de la representación de proximidad basada en locus.
Fuente: Elaboración propia.

3.4.1.1.2.4.2. La población inicial

Típicamente, los algoritmos evolutivos comienzan con una población inicial compuesto por N individuos. Cada individuo de la población, representa una posible solución a un problema particular. Con frecuencia, esta población se genera aleatoriamente, pero en caso del problema de ordenamiento en cuestión, este procedimiento no da lugar a particiones iniciales favorables, debido a que las clases se mezclan en un alto grado.

El proceso de inicialización está basado en Handl y Knowles (2005), el cual utiliza dos algoritmos: el algoritmo de Prim (Prim, 1957) y una extensión de k-means (De Smet y Montaño, 2004). Con este procedimiento, es posible obtener soluciones iniciales cercanas al frente de Pareto. Las soluciones con alto grado de conectividad se generan utilizando el método de *Árbol de Expansión Mínima* (Minimum Spanning Tree - MST). Al menos la mitad de la población es generada con MST. Por otro lado, las soluciones con un buen rendimiento bajo la compacidad, son generadas con la extensión de k-means.

Generando soluciones basadas en MTS

Para generar individuos para la población inicial utilizando Minimum Spanning Tree, primero se construye un grafo pesado no dirigido $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de alternativas de A, es decir, V son los nodos del grafo y, E son las aristas que relacionan a dichos nodos. El peso w de cada arista es la distancia entre dos nodos conectados. Para obtener esas distancias, el método propuesto por Smet y Montano (2004) y presentado en (10) es utilizado. Una vez que el grafo esta creado, el algoritmo de Prim es utilizado para encontrar el MST.

Debido a que el MTS obtenido, corresponde a una solución con una clase, se requiere generar soluciones dividiendo dicha clase en diferentes números de clases. Para hacer eso, es necesario cortar los enlaces del MTS hasta que el número de clases es alcanzado. Se pone especial atención en seleccionar el o los enlaces que serán cortados. Esto busca reducir enlaces largos, pero no cortar algunos que podrían producir resultados no deseados, es decir, esto podría conducir a la separación de los "atípicos" que podrían ser parte de las clases (Handl y Knowles, 2005). Para evitar este efecto, la definición de "enlaces interesantes" es utilizada, la cual involucra el

descubrimiento de estructura de clase real. Para un conjunto de datos, un conjunto de clases interesantes derivadas un MTS puede ser construido de la siguiente manera:

1. Todos los enlaces del MTS son detectados y ordenados por su grado de interés en una lista.

2. Un conjunto de clases es construida utilizando esa lista ordenada: $\forall n \in \{0,.., \min(I, [0.5 \cdot fsize] - 1)\}$ donde: $fsize$ es el número total de soluciones iniciales.

3. Una clase C_n es generada cortando el primer enlace interesante n.

Generando soluciones basadas en k-means

Utilizando el algoritmo de Prim, sólo la mitad de la población inicial es generada. Para completarla, la extensión de k-means es utilizada. Este algoritmo genera clusters (clases en este caso), de alternativas de decisión en términos de MCDA. El procedimiento de esta extensión es el siguiente:

1. Una partición inicial C es generada con las alternativas de A. k alternativas son seleccionadas aleatoriamente para ser centroides de las clases. Entonces, para cada alternativa $a \in A$, la clase al cual pertenece la alternativa es determinado.

2. Para cada clase $C_i \in C$, el centroide es actualizado a través de un perfil $Q(rl)$ definido como:

$$\forall a \in A : a \in Q_p(r_k) \text{ donde } p = \arg\max \left| \{ y : x \in Q_q(y), \forall y \in C_l \} \right| \tag{25}$$

   El centroide c_i de la clase C_i está definido como una alternativa ficticia r_l.

3. Cada alternativa $a \in A$, es asignada a la clase cuyo centroide c_i está más cercano a ella.

$$Clase(a_i) = \arg\min d(Q(a_i), Q(a_j)) \forall j \in \{1,2,..,k\} \tag{26}$$

4. Los pasos 2 y 3 son repetidos 10 veces.

Este procedimiento es ejecutado para obtener diferentes números de clases $k \in \{2,.., fsize - \min(I, [0.5 \cdot fsize] - 1)\}$. Al menos la mitad de la población inicial es generada por k-means. Las particiones resultantes son convertidas en genotipos basados en MTS.

3.4.1.1.2.4.3. Operadores

Selección

El operador de selección es utilizado para elegir los padres que generaran descendencia o hijos. Estos hijos generados, no necesariamente formaran parte de la siguiente generación, ello dependerá de la aptitud o adaptabilidad de los mismos.

Uno de los métodos de selección ampliamente utilizados es el llamado *torneo*. En un torneo, para elegir un individuo padre que generará descendencia, primeramente se determina el tamaño del torneo t, es decir, el número de individuos competidores que participaran en el mismo. Posteriormente, se eligen t competidores al azar y se realiza una comparación entre ellos, eligiéndose aquél cuyo valor de aptitud, tenga mejor desempeño.

En este algoritmo, se utiliza el método propuesto en Leyva y Fernández (1999), denominado Método de Selección de Complemento (SC) y que está basado en la selección por torneo. Su funcionamiento es el siguiente:

1. Se selecciona un padre $\hat{p}_i(\hat{p}_j)$, mediante un torneo binario *k*-ario basado en el objetivo MinCut y objetivo de desacuerdos de preferencias entre pares n_V, utilizando la siguiente regla:

2. Se selecciona el individuo $\hat{p}_i(\hat{p}_j)$, cuyo valor de *MinCu*t sea más bajo y $n_{V_{\hat{p}_i}}(n_{V_{\hat{p}_j}})$ es mayor que $n_V G$ o $n_V K$, donde $n_V G$ es el promedio de desacuerdos de preferencia entre

pares de la población y $n_V K$ es el promedio de desacuerdos de preferencia entre pares del torneo.

3. Si $i(j)$ no es único, entonces se selecciona el individuo con mayor nivel de credibilidad. Si no hay tal $i(j)$, se intenta la regla con el individuo $\hat{p}_l$, el cual tiene el siguiente valor más bajo de *MinCut*.

Cruzamiento

El operador de cruzamiento que utiliza este algoritmo es conocido con el nombre de *cruzamiento uniforme*. Se elige este operador porque es no es sesgado con respecto al orden de los genes y puede generar cualquier combinación de alelos proveniente de los dos padres seleccionados.

En este operador, se genera una máscara de 0´s y 1´s, logrando la recombinación de dos individuos al intercambiar los valores en el genotipo, de acuerdo con la máscara. Para cada posición, se elige al azar el gen que tomará del padre1 o del padre2. Esto se podría ver como un cruzamiento multipunto en m posiciones.

Mutación

El operador de mutación utilizado en este algoritmo evolutivo, es el presentado en Handl y Knowles (2007), conocido como Operador de Mutación de Vecindad-Sesgado. Handl y Knowles (2007), consideran que la representación de proximidad basada en locus que tiene implementado el algoritmo evolutivo, a pesar de las ventajas que representa su uso, escasamente ha sido utilizado en la literatura, esto debido al tamaño del espacio muestral que genera. Ya que para un conjunto de datos de tamaño N, su espacio muestral es de tamaño N^N. Sin embargo, el tamaño del espacio muestral "Visto" por la mutación, puede reducirse significativamente usando un operador de mutación adecuado. Para este caso, una mutación restringida a los vecinos próximos es usada, donde cada elemento puede ser ligado solamente a uno de sus L vecinos próximos. Esto es, $g_i \in \{nn_{i1},..,nn_{iL}\}$, donde nn_{il} denota el *i-esimo* vecino próximo de elemento i. Con esto, se reduce significativamente el extenso espacio muestral de este tipo de representación, pasando de N^N a tan solo L^N con $L << N$.

Las propiedades de codificación de la representación de proximidad basada en locus, adicionalmente, son utilizadas para influir en la probabilidad de mutación de cada uno de los genes. De manera intuitiva, se espera que los "enlaces largos" en la codificación del individuo sean desfavorecidos, por ejemplo, un enlace $i \rightarrow j$ con $j = nn_{il}$ será preferido sobre un enlace $i \rightarrow j^*$ con $j^* = nn_{ik} \leftrightarrow l < k$. Esto puede es utilizado para influir en la probabilidad de mutación de enlaces individuales de la siguiente manera:

$$pm = \frac{1}{N} + \left(\frac{l}{N}\right)^2 \tag{27}$$

donde $j = nn_{il}$ y N es el tamaño del conjunto de datos. Esto ayuda a descartar enlaces desfavorables y facilita la exploración de soluciones con alto número de clases.

Por tanto, las soluciones que busca el algoritmo sobre un conjunto de alternativas de tamaño pequeño, tiene por característica que las clases contengan (una o dos) alternativas, debido a que el valor de L es también pequeño, por lo tanto el algoritmo tiende a crear clases con pocos elementos. Por otro lado, si para un conjunto de 8 alternativas el valor de L se establece en 8 ($L = 8$), el algoritmo buscará crear clases con muchos elementos, debido que considerará a las 8 alternativas como vecinos próximos y llevará a cabo la mutación entre ellas. Por lo tanto, permitir la mutación con valores grandes de L respecto al número de alternativas, determina que el algoritmo busque clases con mayor número de elementos.

3.4.1.1.2.4.4. Reemplazo de la Población

El método de reemplazo de la población del algoritmo evolutivo, tiene implementado el reemplazo paso a paso. El cual consiste en que una vez que se ha generado un descendiente mediante la aplicación de los operadores de cruzamiento y mutación (si aplica), este método de reemplazo paso a paso, reemplaza al miembro de la población con menor aptitud. Basándose en valor de fitness.

3.4.1.1.3. Paso final para obtener una recomendación (POSET)

En este apartado, se describe un procedimiento para obtener un ordenamiento de las clases de alternativas, basado el uso repetido de un mecanismo de selección y una manera de representar el ranking obtenido, como un diagrama de Hasse para propósito de recomendación. Un diagrama de Hasse es un grafo plano cuyos vértices están en correspondencia uno-a-uno con las clases en $P_k(A)$ y cuyo patrón de aristas, determinan la relación de orden. Los diagramas de Hasse son excelentes para propósitos de visualización cuando $P_k(A)$ no es grande.

El procedimiento, el cual es una variante del propuesto por Patil y Taillie (2004), que produce como salida el diagrama de Hasse de las clases obtenidas. La Figura 3.8, muestra una relación de sobreclasificación crisp de clases inducida $S^*_{P_k(A)}$ y el diagrama de clases generado por el procedimiento propuesto.

Para obtener el ranking final se procede de la siguiente manera:

Iniciando desde $S^*_{P_k(A)}$ sugerida desde algún individuo:

Sea $\overline{S^*_{P_k(A)}} = S^*_{P_k(A)}$ el conjunto de clases iniciales que serán ordenadas. Sea $r = 1$ el rank actual.

Paso 1. Desde el conjunto de clases en $\overline{S^*_{P_k(A)}}$, se buscan aquellas que no son preferidas por ninguna otra clase. Entonces, estas clases son asignadas al rank actual r.

Paso 2. Esas clases, no preferidas por ninguna otra, son removidas de $\overline{S^*_{P_k(A)}}$.

Paso 3. El rank actual r es incrementado por 1, esto es $r = r + 1$.

Paso 4. Si $\overline{S^*_{P_k(A)}} \neq \varnothing$, ir al paso 1. De otra manera, el proceso es finalizado.

Con esa información, se dibuja un diagrama de Hasse para representar un orden parcial de clases O^* de $S^*_{P_k(A)}$. Primero, las clases son dibujadas de arriba hacia debajo de acuerdo a su

rank. Entonces, para cada par de clases $(C_r, C_q) \in S^*_{P_k(A)}$, se dibuja una flecha conectando ambas clases si esto entre ellas hay una relación de cobertura. Una clase r cubre a una clase s, $C_r \geq C_s$, si $C_r P^+ C_s$ y no hay ninguna clase $q \in S^*_{P_k(A)}$ para la cual $C_r P^+ C_q \wedge C_q P^+ C_s$. P^+ en $C_r P^+ C_s$ significa que la clase C_r es preferida a la clase C_s.

Considérese el ejemplo de la Figura 3.8, se puede apreciar que en el diagrama de Hasse, que C_1 está asignada al primer rank y esta es preferida a C_2, esto es $C_1 P C_2$. Se puede apreciar la flecha desde C_1 hasta C_2, debido a su relación de cobertura y porque no hay una clase $q \in S^*_{P_k(A)}$ tal que $C_1 P^+ C_q \wedge C_q P^+ C_2$. Por otra parte, $C_1 P^+ C_4$ no es una relación de cobertura, porque $C_1 P^+ C_3 \wedge C_3 P^+ C_4$, por tanto, no se dibuja una línea entre C_1 y C_4. El hecho que $C_1 P^+ C_4$ es deducida desde el diagrama de Hasse es debido a la propiedad de transitividad.

Relación de Sobreclasificación Crisp de Clases

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	I	P^+	P^+	P^+	P^+
C_2	P^-	I	R	R	P^+
C_3	P^-	R	I	P^+	P^+
C_4	P^-	R	P^-	I	P^+
C_5	P^-	P^-	P^-	P^-	I

Diagrama de Hasse de las Clases

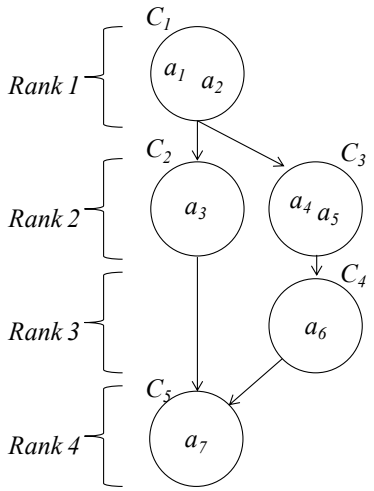


Figura 3.8. Relación de sobreclasificación crisp de clases con su diagrama de Hasee.
Nota: En la relación de sobreclasificación crisp de clases, I, P^+, P^-, R denotan indiferencia, preferencia, no preferencia e incomparabilidad respectivamente.
Fuente: Elaboración propia.

3.4.1.2. Segunda parte: prueba y evaluación del MOEA-POSET

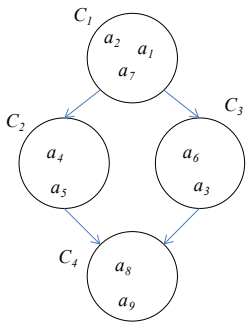
La segunda parte de la investigación experimental, involucró la evaluación empírica del componente de software. Esta evaluación consistió valorar si el algoritmo evolutivo multiobjetivo es capaz de encontrar soluciones sin inconsistencias. Lo anterior, es tomando como principio, ya

que las relaciones de sobreclasificación valuadas proporcionadas al algoritmo, carecían de inconsistencias y además, existía al menos un ordenamiento de alternativas sin inconsistencias asociado a dicha relación.

Si en el ordenamiento obtenido por el MOEA-POSET, la relación de preferencia entre un par de alternativas a y b es de un tipo determinado y en la relación de sobreclasificación valuada para un nivel de corte determinado es de otra naturaleza, entonces se está ante la presencia de una inconsistencia. La Figura 3.9 muestra una solución sin inconsistencias, mientras que la Figura3.10, muestra una solución con inconsistencias.

Solución sin inconsistencias para $\lambda = 0.70$

Representación en forma de grafo



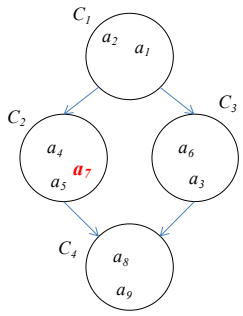
Relación de sobreclasificación valuada S_A^{σ}

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1.00	0.90	0.85	0.90	0.85	0.90	0.90	0.85	0.90
a_2	0.90	1.00	0.90	0.85	0.90	0.90	0.85	0.90	0.90
a_3	0.60	0.55	1.00	0.50	0.55	0.85	0.60	0.90	0.90
a_4	0.55	0.55	0.50	1.00	0.85	0.50	0.60	0.85	0.90
a_5	0.60	0.60	0.50	0.90	1.00	0.50	0.55	0.90	0.90
a_6	0.60	0.60	0.85	0.55	0.55	1.00	0.60	0.85	0.85
a_7	0.85	0.90	0.85	0.90	0.90	0.90	1.00	0.85	0.85
a_8	0.55	0.60	0.50	0.60	0.55	0.55	0.60	1.00	0.85
a_9	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.60	0.50	0.90	1.00

Figura 3.9. Representación de una solución del MOEA-POSET sin inconsistencias.
Fuente: Elaboración propia.

Solución con inconsistencias para $\lambda = 0.70$

Representación en forma de grafo



Relación de sobreclasificación valuada S_A^{σ}

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1.00	0.90	0.85	0.90	0.85	0.90	**0.90**	0.85	0.90
a_2	0.90	1.00	0.90	0.85	0.90	0.90	**0.85**	0.90	0.90
a_3	0.60	0.55	1.00	0.50	0.55	0.85	**0.60**	0.90	0.90
a_4	0.55	0.55	0.50	1.00	0.85	0.50	**0.60**	0.85	0.90
a_5	0.60	0.60	0.50	0.90	1.00	0.50	**0.55**	0.90	0.90
a_6	0.60	0.60	0.85	0.55	0.55	1.00	**0.60**	0.85	0.85
a_7	**0.85**	**0.90**	**0.85**	**0.90**	**0.90**	**0.90**	1.00	0.85	0.85
a_8	0.55	0.60	0.50	0.60	0.55	0.55	0.60	1.00	0.85
a_9	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.60	0.50	0.90	1.00

Figura 3.10. Representación de una solución del MOEA-POSET con inconsistencias.
Fuente: Elaboración propia.

3.4.1.2.1. Descripción del experimento

Una simulación exhaustiva fue realizada para comparar las soluciones del MOEA-POSET y los rankings inducidos. Debido a que la prueba estuvo basada en elementos de aleatoriedad, ésta proporcionó un marco de trabajo que condujo a hacer comparaciones bajo diferentes condiciones de los datos, derivando en observaciones y conjeturas sobre el desempeño del MOEA-POSET frente a problemas de ordenamiento de conjuntos de alternativas de tamaño mediano.

Esta prueba, consistió en una comparación respecto al número de inconsistencias entre rankings inducidos de alternativas y las soluciones obtenidas con el MOEA-POSET. Una solución sin inconsistencias es aquella cuyos valores de las funciones objetivo[17] $MinCut$ y n_V son cero.

Este estudio empírico fue una prueba binomial extrema, debido a que sólo cuando todas las alternativas estuvieron colocadas en el orden correcto, respecto al ranking inducido, el número de inconsistencias es cero en las funciones objetivo $MinCut$ y n_V. A razón de que el algoritmo evolutivo multiobjetivo trata de encontrar "soluciones perfectas" y en esta prueba no se cuenta con los Frentes de Pareto Verdadero de cada ranking inducido, una prueba para conocer que tan "lejos" estuvieron las soluciones del MOEA-POSET respecto al Frente de Pareto Verdadero, no fue posible realizarla.

Debido a que uno de los datos de entrada del algoritmo evolutivo es una relación de sobreclasificación valuada, un conjunto de ellas fueron creadas a partir de ordenamientos inducidos generados aleatoriamente con un algoritmo directo. Estos rankings eran órdenes parciales de clases de alternativas o visto de otra manera, preordenes parciales de alternativas. Por tanto, no hubo presencia de inconsistencias entre las relaciones de sobreclasificación valuadas y dichos rankings. En un preorden parcial de alternativas, típicamente existen alternativas indiferentes entre sí, formándose de esa manera, clases de alternativas. Además,

[17] La función objetivo *MinCut* corresponde a las inconsistencias al interior de las clases. *Mincut* = 0 si en cada una de las clases del ranking solamente existen alternativas indiferentes entre sí. Por otra parte, la función objetivo n_V corresponde a las inconsistencias al exterior de las clases. $n_V = 0$ cuando no hay discrepancias en las relaciones entre clases y el modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones.

puede haber clases incomparables, es decir, un conjunto de alternativas las cuales mantienen una relación de incomparabilidad con otro conjunto de alternativas.

3.4.1.2.2. Los factores

En esta prueba se consideraron tres factores o variables, los cuales están relacionados con el número de clases, número de alternativas y factor L [18]. Esos factores fueron predefinidos como se muestra en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Diseño experimental de la prueba del MOEA-POSET vs rankings inducidos.

Factor	Niveles
F_1 : Factor L	3, 5, 7, 9, 11
F_2 : Número de clases	3, 5, 7, 9, 11
F_3 : Número de alternativas	15, 30, 60, 90, 120, 150

Fuente: Elaboración propia.

3.4.1.2.3. Generación de datos

La generación de los datos para el algoritmo evolutivo multiobjetivo fue a través de un programa de cómputo generador de instancias, desarrollado con el lenguaje de programación GNU C. Para cada instancia, se generó un ordenamiento de alternativas inducido O y, a partir de él, se obtuvo su correspondiente relación de sobreclasificación valuada, la cual sirvió de entrada para el MOEA-POSET (ver Figura 3.11). Este programa fue ejecutado en un Servidor HP Proliant ML350 G6 con procesador Quad-Core Intel Xeon 5606 (2.13 GHz , 4-core), 4GB de memoria base (DDR3-1066) y Disco duro HP 250GB 3G SATA 7.2K rpm LFF 3.

[18] Recuérdese que el Factor L utilizado en la inicialización de la población y el operador de mutación del algoritmo evolutivo, determina la cantidad de vecinos próximos con los que llevará a cabo la mutación, donde con valores grandes de L respecto al número de alternativas, se determina que el algoritmo busque clases con mayor número de elementos. (Ver el operador de mutación en el apartado 3.4.1.1.2.4 para una mayor explicación del factor L).

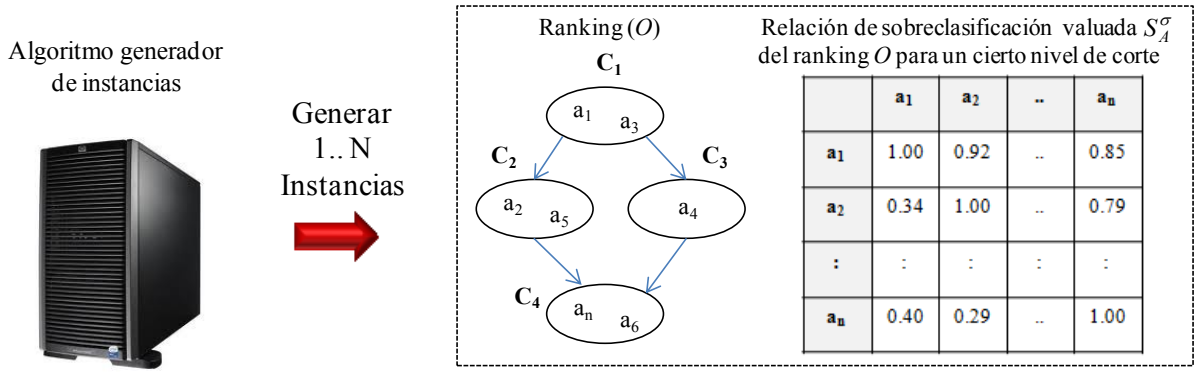


Figura 3.11. Modelo de generación de datos para el MOEA-POSET.
Fuente: Elaboración propia.

El procedimiento general para obtener las relaciones de sobreclasificación valuadas con las propiedades requeridas para esta prueba, se muestra a continuación:

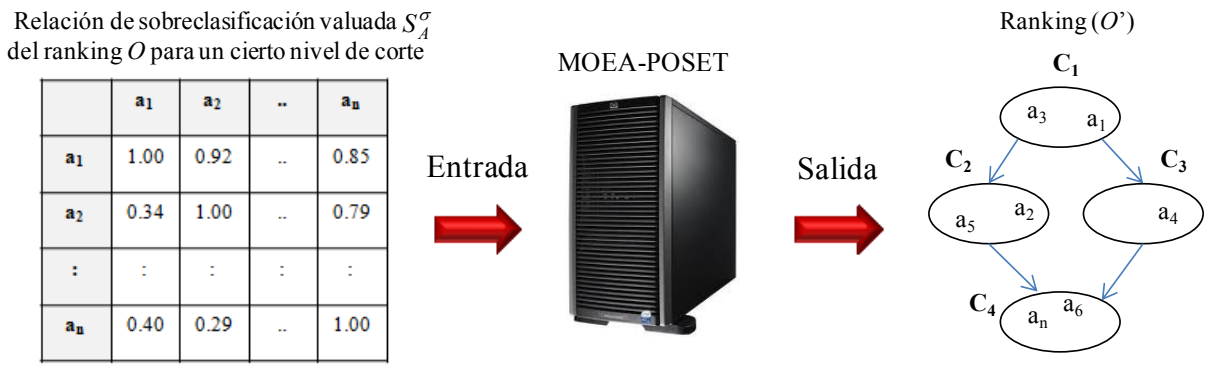
1. Inicio
2. Definir el número de clases N_C y la cantidad de alternativas N_A
3. Aleatoriamente generar un conjunto parcialmente ordenado en forma de una matriz de adyacencia AM de tamaño $N_C \times N_C$
4. Crear un arreglo de alternativas $ARRAY$ y aleatoriamente asignar una clase a cada alternativa
5. Aleatoriamente generar un valor de nivel de corte para lambda λ_{cut}; $0.60 \leq \lambda_{cut} \leq 0.75$;
6. Crear y llenar una matriz de sobreclasificación valuada VO_{Matrix} de tamaño $N_A \times N_A$ de acuerdo con los valores de AM , $ARRAY$ y λ_{cut}
7. Fin

La salida del procedimiento anterior es: dos matrices y un vector. La primera matriz es una relación de sobreclasificación valuada que está en concordancia con la matriz de credibilidad generada por el método ELECTRE-III, es decir, cumple con al menos la propiedad de reflexividad, la cual es deseable para el MOEA-POSET. La segunda, es una matriz de adyacencia que representa una estructura de clases. Esta estructura es un conjunto parcialmente ordenado (POSET por su acrónimo en inglés), el cual satisface las propiedades de reflexividad, transitividad y antisimetría. Por otro lado, el vector es un arreglo que indica a que clase pertenece cada alternativa. Estas tres estructuras de datos forman un conjunto de referencia, el cual, es necesario para las comparaciones con los resultados del MOEA-POSET. La principal característica de este conjunto de referencia, es la consistencia entre las estructuras de datos que contiene en sí mismo.

El procedimiento anterior fue repetido 100 veces para cada combinación entre los niveles del factor F_2 y factor F_3. Es decir, 3,000 conjuntos de referencia fueron creados.

3.4.1.2.4. Evaluación de los resultados

Cada relación de sobreclasificación valuada generada con el algoritmo generador de instancias, fue utilizada como entrada al MOEA-POSET, para generar un ranking de clases *O'*, asociado a dicha relación (ver Figura 3.12).



	a_1	a_2	..	a_n
a_1	1.00	0.92	..	0.85
a_2	0.34	1.00	..	0.79
:	:	:	:	:
a_n	0.40	0.29	..	1.00

Figura 3.12. Modelo para el procesamiento de los datos por el MOEA-POSET.
Fuente: Elaboración propia.

Cada ranking de clases *O'* generado por el procedimiento MOEA-POSET, fue comparado con los rankings inducidos *O* de los conjuntos referencia, para conocer si el MOEA-POSET era capaz de encontrar soluciones sin inconsistencias. La Figura 3.13 muestra la comparación entre ambos ordenamientos.

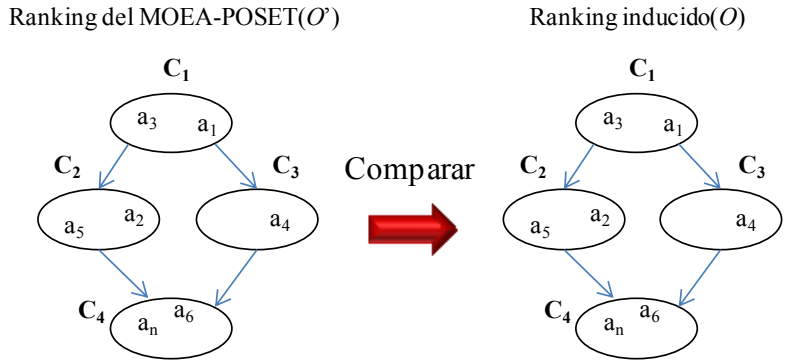


Figura 3.13. Ordenamiento de clases *O'* del MOEA-POSET vs. el ranking inducido *O*.
Fuente: Elaboración propia.

3.4.1.2.5. Configuración del MOEA-POSET

Como se presentó en la Tabla 3.2, el estudio incluyó tres factores. Para cada nivel del factor F_1, el Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo se ejecutó 3,000 veces debido a las combinaciones de los factores F_2 y F_3. Por lo tanto, el MOEA-POSET en total se ejecutó 15,000 ocasiones recibiendo ese número de relaciones de sobreclasificación valuada. En cada corrida del algoritmo, éste trató de encontrar un ordenamiento de alternativas no tuviese inconsistencias. Es decir, al ser evaluado el ordenamiento obtenido, las funciones objetivo $MinCut$ y n_V fueran igual a cero.

Los parámetros con los que se ejecutó el MOEA-POSET fueron fijados como sigue: tamaño de la población = 50, número de generaciones = 5,000, probabilidad de cruzamiento = 0.90, debido al diseño del operador de mutación, no es necesario establecer un valor para él. Además de los parámetros propios del algoritmo evolutivo, se le proporcionó un rango de valores para el nivel de credibilidad: $\lambda_{\min} = 0.66$ y $\lambda_{\max} = 0.75$ para generar el ranking de alternativas.

El resultado de utilizar el MOEA-POSET para explotar una relación de sobreclasificación valuada, la cual integra las preferencias de un tomador de decisiones, permite generar una recomendación en forma de ranking, la cual podría ayudar al DM a tomar la decisión. Los resultados de esta prueba son presentados en el capítulo 4.

3.5. El método de destilación vs rankings inducidos

Dos métodos de sobreclasificación clásicos y ampliamente utilizados para generar ordenamientos de alternativas, son ELECTRE-III y PROMETHEE-II. El primero de ellos utiliza el método conocido como *destilación*, en el cual se realiza dos rankings: ascendente y descendente. A partir de esos rankings se genera un ordenamiento final. PROMETHEE-II por su parte, utiliza la *Regla de Flujo Neto* que genera dos flujos, uno negativo y otro positivo; mediante ellos genera un ranking final. Ambos métodos utilizan una función de anotación (score) y son de tipo determinista, es decir, ante los mismos datos de entrada, un método de este tipo, producirá los mismos resultados, el azar e incertidumbre no están presentes.

Se decidió hacer una comparación entre los resultados obtenidos con el algoritmo evolutivo multiobjetivo propuesto y el método de destilación. La decisión de hacerlo con ese método, estribó en que este último ha sido utilizado como referencia en trabajos similares (Leyva y Fernández, 1999; Fernández y Leyva, 2004; Leyva y Aguilera, 2005) y además de que esté trabajo es una extensión Leyva y Aguilera (2005).

Aún cuando existe evidencia que los métodos de ordenamiento que utilizan una función de score para formar el ranking, no tienen un desempeño adecuando ante la presencia de alternativas irrelevantes y en casos de grafos complejos con muchos circuitos (Leyva y Aguilera, 2005), se decidió por el método de destilación porque las relaciones de sobreclasificación valuada que recibió de entrada, fueron las mismas que se generaron con el algoritmo presentado en el apartado 3.4.1.2.3 sobre la generación de datos. Estas relaciones, carecían de ciclos e inconsistencias, toda vez que se crearon a partir de conjuntos parcialmente ordenados de clases, es decir, cumplían las propiedades de transitividad, reflexibilidad y antisimetría. Por tanto, para cada relación de sobreclasificación valuada utilizada en la prueba, existía un ranking asociado a ella sin inconsistencias.

Además, Leyva y Araoz (2013), realizaron un análisis empírico exhaustivo comparando la Regla de Flujo Neto y el ELECTRE-MOEA presentado en (Leyva y Aguilera, 2005). Para ello, utilizaron relaciones de sobreclasificación valuadas generadas artificialmente. En sus hallazgos, reportaron que las tasas de error[19] de ambos métodos fueron significativas y se hicieron más dramáticas en la medida que el número de alternativas se incrementaba. En ese trabajo, los tamaños de los conjuntos fueron de 6, 8, 10, 12 y 18 alternativas. Al final, el método de la regla de flujo neto tuvo mayores tasas de error que el ELECTRE-MOEA.

3.5.1. Tamaño y selección de la muestra

Debido a que el proceso para evaluar el método de destilación con las 3,000 relaciones de sobreclasificación valuada, era impráctico. Se decidió utilizar una muestra, cuyo tamaño fue

[19] Las tasas de error de ese estudio, fueron obtenidas utilizando conjuntos de referencia generados artificialmente. Dichas tasas de error proporcionaron una estimación de la evolución general de los métodos de regla de flujo neto y el método ELECTRE-MOEA, midiendo la capacidad de ambos métodos para proporcionar recomendaciones correctas en el ranking de alternativas (Leyva y Araoz, 2013).

calculado mediante la fórmula presentada en Murray y Larry (2005) y definida de la siguiente manera:

$$n = \frac{Z_{\alpha}^{2} \cdot N \cdot p \cdot q}{E^{2} \cdot (N-1) \cdot Z_{\alpha}^{2} \cdot p \cdot q} \tag{28}$$

Donde:
n : es el tamaño muestral.
N : es el tamaño de la población.
Z : es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza elegido.
p : es la probabilidad esperada del parámetro a evaluar.
q : $1-p$.
E : es el margen de error o de imprecisión permitido.

Por tanto, para una población de 3,000 relaciones de sobreclasificación valuada, un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza de 7% y una probabilidad de $p = 0.50$, el tamaño de la muestra fue inicialmente de 184 relaciones de sobreclasificación valuadas:

$$n = \frac{1.96^{2} \cdot 3000 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{0.07^{2} \cdot (3000-1) \cdot 1.96^{2} \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 184.038 = 184 \tag{29}$$

Debido a que el conjunto de las 3,000 relaciones de sobreclasificación valuadas, estaba conformado por 100 relaciones por cada combinación de 3, 5, 7, 9 y 11 clases con 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas; se decidió realizar un muestreo de 30 estratos, eligiendo al azar en cada uno de ellos 7 relaciones de sobreclasificación valuadas. Por tanto, se obtuvieron en total 210 relaciones para generar la misma cantidad de rankings con el método de destilación y no las 184 obtenidas con (29). Al método de destilación se le proporcionó cada nivel de corte con el cual, el algoritmo generador de instancias, generó cada una de las relaciones de sobreclasificación valuadas.

3.5.2. Generación de los ordenamientos con el método de destilación

La generación de los ordenamientos con el método de destilación fue llevada a cabo utilizando el software diviz (Meyer y Bigaret, 2012), es cual permite modelar y procesar métodos tales como

ELECTRE, PROMETHEE, UTA (Jacquet-Lagrèze y Siskos (1982)), entre otros. Diviz es una aplicación de tres partes formadas por un programa cliente, un componente de servicio web XMCDA y un servidor. Para su utilización, el usuario descarga el software cliente. El cliente se conecta al servidor, el cual distribuye los cálculos a servicios web dedicados y finalmente los resultados son enviados al programa cliente (Meyer y Bigaret, 2012)..

Debido a que las relaciones de sobreclasificación valuadas generadas para la prueba anterior, están almacenadas en archivos de texto plano; se realizó una conversión de ese formato al formato XMCDA que utiliza diviz. XMCDA está basado en el lenguaje de marcas de intercambio XML y es un estándar definido por investigadores del proyecto Decision Desk para la interoperabilidad entre varios programas de computo (Meyer y Bigaret, 2012).

Posteriormente, se procedió a crear un flujo de trabajo en diviz, agregando los componentes necesarios para la generación de los rankings con el método de destilación. La Figura 3.14 muestra el flujo de trabajo utilizado para esta prueba. Una vez definida la prueba, la ejecución del método de destilación llevó a cabo en el servidor del proyecto Decisión Desk.

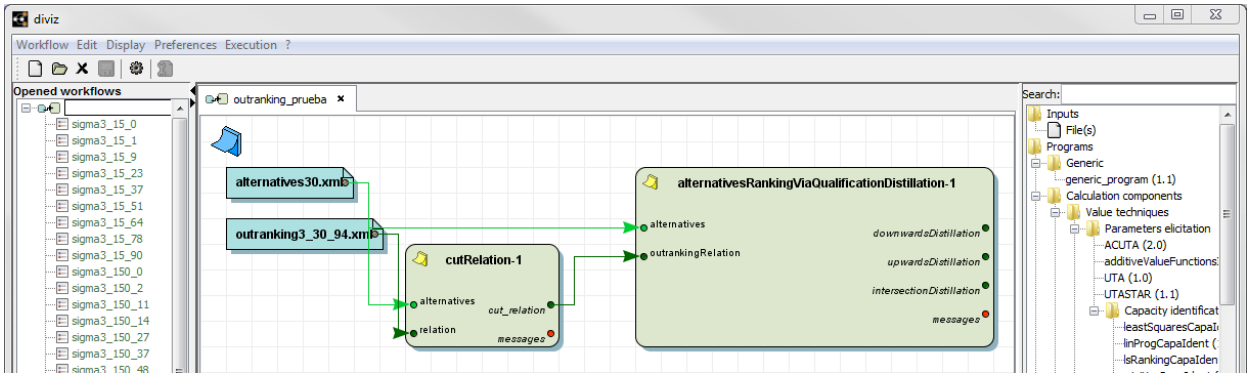


Figura 3.14. Flujo de trabajo en diviz para prueba con el método de destilación.
Fuente: Elaboración propia.

3.5.3. Método de validación de la prueba

De igual manera que con la prueba del MOEA-POSET vs rankings inducidos presentado en el apartado 3.4.1.2.1, en esta prueba con el método de destilación vs rankings inducidos, se consideró que el método de destilación generó una solución sin inconsistencias, sólo cuando todas las alternativas del ranking obtenido con dicho método, estuvieron colocadas en el orden

correcto respecto al ranking inducido. Los resultados de esta prueba son presentados en el Capitulo 4.

3.6. Estudio de caso: Ordenamiento de solicitantes de crédito en una empresa parafinanciera

Para ejemplificar el uso del MOEA-POSET, se realizó un estudio de caso referente al ordenamiento multicriterio de un conjunto de 105 clientes de la empresa proveedora de servicios e insumos agrícolas Green Side ubicada en el municipio de Ahome, Sinaloa, México. Green Side es una empresa parafinanciera[20] que proporciona servicios de financiamiento a productores agrícolas de la región norte del estado de Sinaloa, México. El ordenamiento fue realizado mediante el MOEA-POSET desarrollado, el cual recibió una relación de sobreclasificación valuada generada con ELECTRE-III, misma que integraba las preferencias un tomador de decisiones de la empresa Green Side. La construcción de dicha relación sobreclasificación valuada fue realizada como parte del estudio de caso.

3.6.1. Estrategia para el abordaje del estudio de caso

El estudio de caso fue abordado utilizando de forma general el modelo de decisión de Simon (1947). Sin embargo, de manera específica, se utilizó el enfoque constructivo del apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, como se describe en Tsoukias (2007). Por su parte, la modelación de preferencias del tomador de decisiones se llevó a cabo con el método ELECTRE-III (Roy, 1991). A continuación, se presentan las actividades realizadas en cada fase del modelo de decisión de Simon (1947).

3.6.1.1. Fase de inteligencia

Es esta fase, se describió la empresa y el entorno que envuelve al problema. Se ubicó la situación de la empresa y se detectaron oportunidades, no necesariamente relacionadas con el problema en

[20] Personas físicas o morales del sector privado, acreditadas de los Intermediarios Financieros, que por su capacidad de gestión, poder de negociación y posicionamiento en el mercado, facilitan el acceso, distribución y recuperación de crédito, recursos y/o servicios a productores y empresarios (acreditados finales) de los sectores que atiende FIRA (Fideicomisos Instituidos en Relación con la Agricultura), que en forma individual enfrentan obstáculos para tener acceso a estos servicios (Financiera Rural, 2014).

cuestión. De igual forma, se obtuvieron los objetivos y metas de la empresa. Se indagó, analizó, clasificó y definió el problema a tratar. Además, se identificó al dueño del problema y se estableció la manera de abordar dicho problema para su solución. La salida de esta etapa fue el planteamiento del problema el cual se presenta a continuación:

Considérese un conjunto de tamaño mediano de clientes evaluados por múltiples criterios, algunos estos criterios en conflicto entre sí. Considérese además, una relación de sobreclasificación valuada que integra las preferencias de un tomador de decisiones sobre los criterios que evalúan a los clientes. El problema a resolver es:

Con base a la información contenida en la relación de sobreclasificación valuada, obtener un ranking en orden decreciente preferencial del conjunto de clientes, de tal manera que el número de inconsistencias entre dicho ranking y las preferencias del tomador de decisiones, sea minimizado.

Por lo tanto, se busca obtener un ranking de los clientes en orden decreciente de preferencias, de tal forma que, los clientes con mejor perfil crediticio se encuentren ubicados en los niveles superiores del ranking.

3.6.1.2. Fase de diseño

En esta fase, se generó, desarrolló y analizaron los posibles cursos de acción para resolver el problema de ordenamiento de los clientes de Green Side. Para obtener el modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones, se definieron y caracterizaron los criterios de evaluación, sus pesos y los umbrales de preferencia, indiferencia y veto siguiendo la metodología ELECTRE. El resultado de esta fase fueron las alternativas de solución.

3.6.1.3. Fase de elección

En esta fase, se realizó la búsqueda, evaluación y se generación de una recomendación apropiada a la solución del modelo. Generalmente para la solución un modelo se utilizan entre otras: técnicas analíticas, algoritmos de optimización o técnicas de búsqueda heurísticas o ciegas. En

este estudio de caso, se utilizó el MOEA-POSET desarrollado. El resultado de la explotación del modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones a través del MOEA-POSET, permitió presentar una recomendación de solución al problema a los directivos de Green Side.

La contextualización del problema, la modelación de preferencias del tomador de decisiones, el resultado de la explotación del modelo preferencial y la recomendación final al problema de ordenamiento de clientes de Green Side, son presentados en el Capítulo 5 de este documento

Capítulo 4 . Resultados de la investigación

4.1 Introducción

En este capítulo, se presentan los resultados de esta investigación, los cuales, permitieron dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas y a la interrogante central. En él, se muestran los resultados de la prueba realizada al MOEA-POSET. Para ello, como se reportó en el capitulo anterior, se generaron datos artificiales con programas de computo con el objetivo de probar el método desarrollado mediante simulación. Dicha simulación permitió conocer que el MOEA-POSET es capaz de encontrar ordenamientos sin inconsistencias (soluciones óptimas ó soluciones sin inconsistencias), a partir de las relaciones de sobreclasificación valuadas que le fueron suministradas.

4.2 Resultados de la prueba del MOEA vs ordenamientos inducidos

Primeramente, se realizó una prueba de correlación entre cada factor y los resultados obtenidos, para conocer la asociación entre ellos mediante el coeficiente de correlación de Spearman. La correlación entre el factor L [21] y los resultados obtenidos fue -0,271, lo cual indica una relación inversa débil entre ellos. Por otro lado, la asociación entre el número de clases y los resultados fue -0,808, lo que significa que hay una relación inversa fuerte. En una prueba de correlación, una relación inversa significa que cuando el valor de las variables independientes aumenta, la variable dependiente disminuye y, lo contrario ocurre también. En este caso, las variables independientes fueron los factores y la variable dependiente fue el resultado. Respecto a la correlación entre el número de alternativas y los resultados, el coeficiente de Spearman fue -0.023, es decir, existe una relación inversa débil entre ellos.

Además, se creó una tabla de distribución de los resultados obtenidos en los 150 escenarios para analizar las tres variables independientes al mismo tiempo. También, se crearon las tablas de distribución de cada variable independiente para todos los escenarios. Los resultados se muestran en los siguientes apartados:

[21] Recuérdese que el factor L es utilizado en la inicialización de la población y en el operador de mutación del algoritmo evolutivo y que con él se determina la cantidad de vecinos próximos con los que llevará a cabo la mutación. Además que con valores grandes de L en relación al número de alternativas, este factor determina que el algoritmo busque clases con mayor número de elementos.

4.2.1 Descripción estadística global de los resultados

Como una primera aproximación, los resultados de los 150 escenarios fueron tomados en un sentido amplio. Es decir, se tomó en cuenta sólo el número de soluciones óptimas obtenidas por el MOEA-POSET en los diferentes valores del factor L, número de clases y número de alternativas, presentados en el apartado 3.4.1.2.2. Por conveniencia, estos valores son presentados nuevamente en la Tabla 4.1. Por cada escenario, el MOEA-POSET recibió como entrada 100 relaciones de sobreclasificación valuadas.

Tabla 4.1. Factores de utilizados en la prueba del MOEA-POSET vs rankings inducidos

Factor	Niveles
F_1 : Factor L	3, 5, 7, 9, 11
F_2 : Número de clases	3, 5, 7, 9, 11
F_3 : Número de alternativas	15, 30, 60, 90, 120, 150

Fuente: Elaboración propia.

Con los resultados obtenidos con el MOEA-POSET, se construyó una tabla de distribución de frecuencias para conocer su desempeño en los diferentes escenarios. Dicha distribución de frecuencias es mostrada en la Tabla 4.2 y fue elaborada utilizando los siguientes valores: Número de escenarios $n = 150$, valor máximo $max = 100$, valor mínimo $min = 0$, $rango = 100$, $intervalos\ de\ clase = 9$ (utilizando la regla de Sturges $m = 1 + 3.322 \log(n)$), $amplitud\ de\ clase = 12$.

Tabla 4.2. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET

Intervalo	Intervalos de Clase		Marca de Clase	Frecuencia Absoluta	Frequencia Relativa	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Acumulada
	Lim. Inferior	Lim. Superior	(xi)	(fi)	(f%)	Absoluta fi (+)	Relativa f% (+)	Absoluta fi (-)	Relativa f% (-)
1	[0	- 12)	6	23	15.33%	23	15.33%	150	100.00%
2	[12	- 24)	18	12	8.00%	35	23.33%	127	84.67%
3	[24	- 36)	30	13	8.67%	48	32.00%	115	76.67%
4	[36	- 48)	42	11	7.33%	59	39.33%	102	68.00%
5	[48	- 60)	54	12	8.00%	71	47.33%	91	60.67%
6	[60	- 72)	66	6	4.00%	77	51.33%	79	52.67%
7	[72	- 84)	78	18	12.00%	95	63.33%	73	48.67%
8	[84	- 96)	90	13	8.67%	108	72.00%	55	36.67%
9	[96	- 108)	102	42	28.00%	150	100.00%	42	28.00%
			Σ =	150	100.00%				

Nota: Los resultados del MOEA-POSET están en la columna Frecuencia Absoluta respecto a los límites inferior y superior

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.2, el primer intervalo indica que el MOEA-POSET encontró entre 0 y 11 soluciones óptimas en 23 de los 150 escenarios. Ese número representa 15.33% del total de los escenarios.

El segundo intervalo, muestra que el MOEA-POSET obtuvo entre 12 y 23 soluciones sin inconsistencias en 12 escenarios, esto representa el 8% del total de escenarios. Así, en 35 escenarios, el MOEA-POSET encontró entre 0 y 23 soluciones óptimas, que corresponden al 23.33% de todos los escenarios. Desde otra perspectiva, entre 12 y 100 soluciones óptimas se encontraron en 127 escenarios, es decir, el 84,67%.

Los resultados en el tercer intervalo, muestran que el MOEA-POSET encontró entre 24 y 35 soluciones óptimas en 13 escenarios. Estos resultados corresponden al 8.67% de todos los escenarios. En este punto, en 48 de los 150 escenarios definidos en este estudio, el método obtuvo entre 0 y 35 soluciones sin inconsistencias, siendo esto, el 32% de los escenarios. En otras palabras, de 24 a 100 soluciones óptimas fueron encontradas por el MOEA-POSET en 115 escenarios. Estos 115 escenarios representan 76.67% del total.

En ese mismo sentido, los resultados del cuarto intervalo, muestran que el método encontró entre 36 y 47 soluciones óptimas en 11 escenarios. Eso corresponde al 7.33% de los 150 escenarios. Por lo tanto, en 59 del total de escenarios, el MOEA-POSET obtuvo entre 0 y 47 soluciones sin inconsistencias, que representa el 39.33% de los escenarios. En otra perspectiva, entre 36 y 100 soluciones óptimas fueron encontrados por el algoritmo evolutivo en 102 escenarios, en este caso, corresponde a 68% del total de escenarios.

Por su parte, el quinto intervalo muestra que el MOEA-POSET encontró en 12 escenarios, resultados entre 48 y 59 soluciones óptimas en las 100 ejecuciones realizadas en cada escenario. Este resultado representa el 8% de los 150 escenarios en total. Teniendo en cuenta los resultados acumulados hasta este quinto intervalo, el método encontró 71 escenarios con soluciones sin inconsistencias en el intervalo del 0 al 59, es decir, el 47.33% de los 150 escenarios. Entonces, en 91(60,67%) del total de los escenarios, el MOEA-POSET encontró entre 48 y 100 soluciones óptimas.

Por otro lado, el sexto intervalo muestra que el método obtuvo entre 60 y 71 soluciones óptimas en 6 escenarios, esto corresponde al 4% del total de escenarios. Tomando en cuenta todos los intervalos anteriores y éste, el MOEA-POSET encontró entre 0 y 71 soluciones sin inconsistencias en 77 escenarios, lo que corresponde al 51.33% de los 150 escenarios definidos en este estudio empírico. Esto indica que, entre 60 y 100 soluciones óptimas fueron encontrados por el MOEA-POSET en 79 (52.67%) del total de escenarios.

Respecto al séptimo intervalo, éste muestra que en 18 escenarios, el método encontró entre 72 y 83 soluciones óptimas. Esto representa 12% del total de los escenarios. Lo anterior implica que hasta este punto, el MOEA-POSET obtuvo entre 0 y 83 soluciones sin inconsistencias en 95 escenarios, lo cual corresponde al 63.33% de los 150 escenarios. Visto esto desde otro punto de vista, entre 72 y 100 soluciones óptimas fueron encontradas por el método en 73 escenarios, es decir, en 48,67% del total de los escenarios.

Los resultados del octavo intervalo, revelan que el MOEA-POSET encontró entre 84 y 95 soluciones óptimas en 13 escenarios (8,67% del total de escenarios). Esto indica que, teniendo en cuenta los resultados acumulativos hasta este intervalo, el métodp obtuvo en 108 escenarios en un rango de 0 a 95 soluciones sin inconsistencias, que corresponde al 72% de los 150 escenarios definidos en este estudio; o bien, que entre 84 y 100 soluciones óptimas fueron encontradas en 55 (36,67%) del total de escenarios.

Por último, en el noveno intervalo de la Tabla 4.1 se puede observar que el MOEA-POSET encontró entre 96 y 100 soluciones sin inconsistencias en 42 (28%) de los 150 escenarios.

Como dato extra, en 10 (6,67%) ocasiones, el MOEA-POSET no encontró soluciones óptimas. Sin embargo, en 30 (20%) de las veces, encontró las 100 soluciones sin inconsistencias. Un histograma global de este estudio empírico es mostrado en la Figura 4.2 y un resumen estadístico del mismo es presentado a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	71.5
1er. cuartil:	25.750	Sesgo:	-0.323
Mediana:	69	Kurtosis;	-1.399

3er. cuartil: 97.250 N: 150
Máximo 100

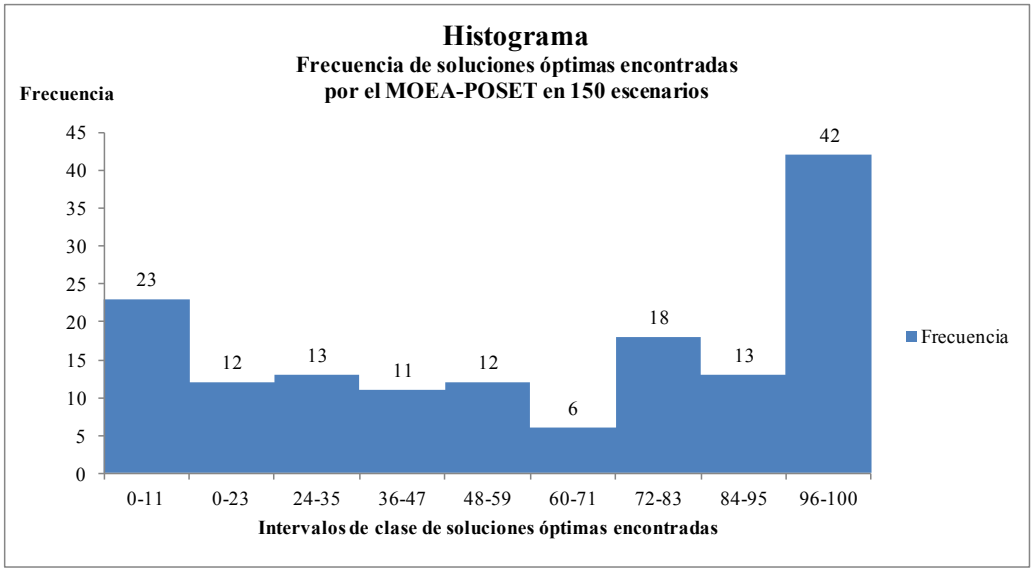


Figura 4.1. Histograma del estudio empírico.
Fuente: Elaboración propia.

4.2.2 Descripción estadística de los resultados por factor

A continuación se presentan los resultados por cada factor definido en este estudio empírico, es decir, el factor L, el número de clases y el número de alternativas.

4.2.2.1 Resultados por el factor L

En este apartado, se presenta el desempeño del algoritmo evolutivo teniendo en cuenta principalmente el factor L. Aunque, ocasionalmente, se asocia con el número de clases y el número de alternativas.

Para $L = 3$ ($F_1 = 3$), los valores preliminares para construir la tabla descriptiva fueron los siguientes: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 96$, $rango = 4$, $intervalos\ de\ clase = 96$ y la $amplitud\ de\ clase = 1$. Los resultados descriptivos son mostrados en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 3$.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	17)	8.5	2	0.067	6.67%
2	[17	-	34)	25.5	1	0.033	3.33%
3	[34	-	51)	42.5	2	0.067	6.67%
4	[51	-	68)	59.5	5	0.167	16.67%
5	[68	-	85)	76.5	4	0.133	13.33%
6	[85	-	102)	93.5	16	0.533	53.33%
					30	1.000	100%

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la Tabla 4.3, independientemente de los valores del número de clases y el número de alternativas, el MOEA-POSET encontró un número de soluciones óptimas mayores de 50 en 25 (83,33%) de los 30 escenarios, donde para cada escenario, el algoritmo fue ejecutado 100 veces. La Figura 4.3 muestra el histograma de estos resultados y un resumen estadístico del mismo es presentado a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	45.5
1er. cuartil:	54.500	Sesgo:	-1.227
Mediana:	85.500	Kurtosis;	0.675
3er. cuartil:	100	N:	30
Máximo	100		

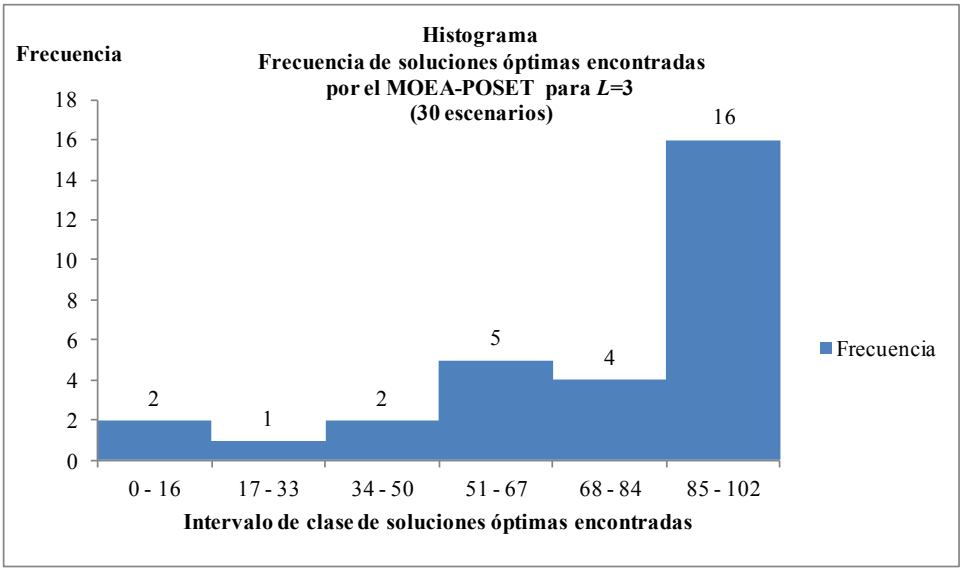


Figura 4.2. Histograma del estudio empírico para $L = 3$.
Fuente: Elaboración propia.

Para $L = 5$ ($F_2 = 5$), los valores preliminares para construir la tabla descriptiva fueron: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 0$, $rango = 100$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 17$. Los resultados descriptivos son mostrados en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 5$.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	17)	8.5	2	0.067	6.67%
2	[17	-	34)	25.5	3	0.100	10.00%
3	[34	-	51)	42.5	6	0.200	20.00%
4	[51	-	68)	59.5	3	0.100	10.00%
5	[68	-	85)	76.5	5	0.167	16.67%
6	[85	-	102)	93.5	11	0.367	36.67%
					30	1.000	100%

Fuente: Elaboración propia.

Con ese número de L, el MOEA-POSET encontró más de 50 soluciones sin inconsistencias en 19 de los 30 escenarios (63,33%). En 15 de los 30 casos, el algoritmo evolutivo encontró más de 75 soluciones óptimas. En dos escenarios, el MOEA-POSET no encontró soluciones sin inconsistencias; estos casos corresponden a 9 y 11 clases, ambos con 15 alternativas. El histograma de estos resultados se muestra en la Figura 4.4 y el resumen con datos estadísticos se presenta a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	58.750
1er. cuartil:	38.500	Sesgo:	-0.502
Mediana:	76.000	Kurtosis;	-0.953
3er. cuartil:	97.250	N:	30
Máximo	100		

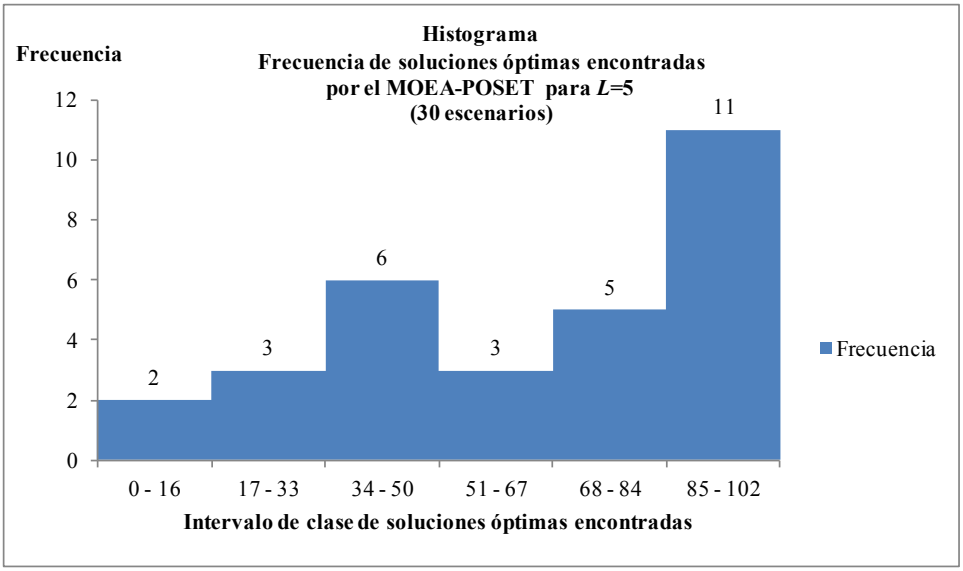


Figura 4.3. Histograma del estudio empírico para $L = 5$.
Fuente: Elaboración propia.

Para $L = 7$ ($F_1 = 7$), los valores preliminares para la construcción de la tabla descriptiva de resultados fueron: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 0$, $rango = 100$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 17$. La Tabla 4.5 muestra la descripción estadística de los resultados.

Tabla 4.5. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 7$.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	17)	8.5	5	0.167	16.67%
2	[17	-	34)	25.5	5	0.167	16.67%
3	[34	-	51)	42.5	5	0.167	16.67%
4	[51	-	68)	59.5	0	0.000	0.00%
5	[68	-	85)	76.5	6	0.200	20.00%
6	[85	-	102)	93.5	9	0.300	30.00%
					30	1.000	100%

Fuente: Elaboración propia.

Con ese valor de L, en 17 de los 30 escenarios (56,66%), el MOEA-POSET encontró al menos 50 soluciones óptimas. En el mismo sentido, en 13 de los 30 escenarios (43.33%), el MOEA-POSET encontró más de 75 soluciones sin inconsistencias. Una vez más, en dos escenarios, el algoritmo evolutivo no encontró soluciones óptimas. Estos casos fueron con 9 y 11

clases, ambos con 15 alternativas. El histograma de estos resultados se muestra en la Figura 4.5 y un resumen con datos estadísticos sobre ellos, se presenta a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	74.750
1er. cuartil:	22.750	Sesgo:	-0.194
Mediana:	60	Kurtosis;	-1.555
3er. cuartil:	97.500	N:	30
Máximo	100		

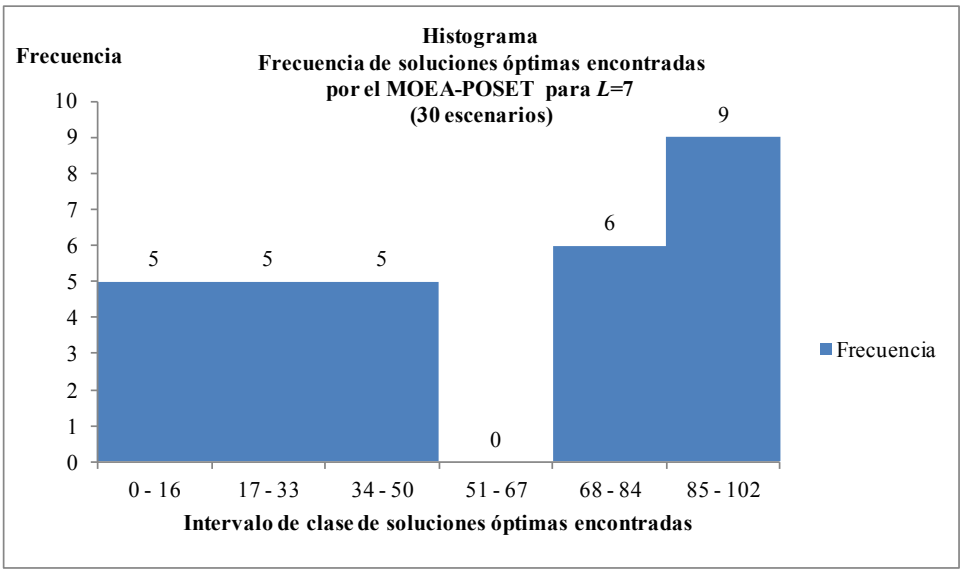


Figura 4.4. Histograma del estudio empírico para $L = 7$.
Fuente: Elaboración propia.

Para $L = 9$ ($F_1 = 9$), los valores preliminares para construir la tabla descriptiva fueron los siguientes: numero de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 0$, $rango = 100$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 17$. La Tabla 4.6 muestra los resultados para este valor de L.

Tabla 4.6. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 9$.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	17)	8.5	7	0.233	23.33%
2	[17	-	34)	25.5	6	0.200	20.00%
3	[34	-	51)	42.5	2	0.067	6.67%
4	[51	-	68)	59.5	2	0.067	6.67%
5	[68	-	85)	76.5	5	0.167	16.67%
6	[85	-	102)	93.5	8	0.267	26.67%
					30	1.000	100%

Fuente: Elaboración propia.

Con $L = 9$, en 15 de los 30 escenarios, el MOEA-POSET encontró más de 50 soluciones sin inconsistencias. En 12 de los 30 escenarios (40%) obtuvo al menos 75 soluciones óptimas. Por otra parte, en 11 de los 30 escenarios (36,66%), el método encontró a lo máximo 25 soluciones sin inconsistencias. El histograma con estos resultados es mostrado en la Figura 4.6 y a continuación se presenta un resumen con datos estadísticos:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	80
1er. cuartil:	16.500	Sesgo:	0.062
Mediana:	49.000	Kurtosis;	-1.605
3er. Cuartil:	96.500	N:	30
Máximo	100		

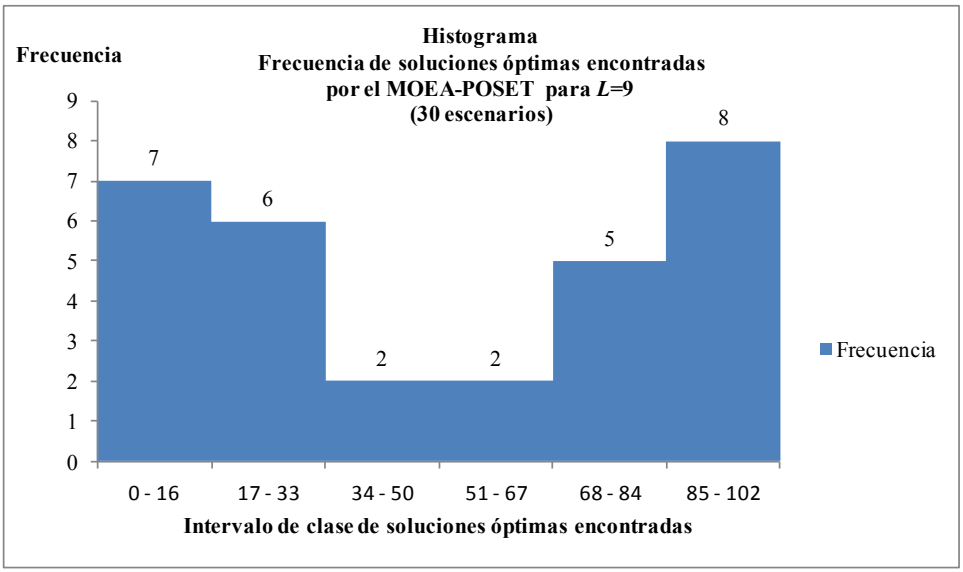


Figura 4.5. Histograma del estudio empírico para $L = 9$.
Fuente: Elaboración propia.

Para $L = 11$ ($F_1 = 11$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 0$, $rango = 100$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y la $amplitud\ de\ clase = 17$. La distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 11$, es mostrada en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET para $L = 11$.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	17)	8.5	11	0.367	36.67%
2	[17	-	34)	25.5	2	0.067	6.67%
3	[34	-	51)	42.5	3	0.100	10.00%
4	[51	-	68)	59.5	2	0.067	6.67%
5	[68	-	85)	76.5	4	0.133	13.33%
6	[85	-	102)	93.5	8	0.267	26.67%
					30	1.000	100%

Fuente: Elaboración propia.

Con $L = 11$, en 14 de los 30 escenarios (46,66%), el MOEA-POSET encontró más de 50 soluciones óptimas. Así mismo, en 11 de los 30 escenarios (36,66%), el método obtuvo al menos 75 soluciones sin inconsistencias. Sin embargo, en 13 de los 30 escenarios (43.33%), el MOEA-POSET encontró menos de 25 soluciones óptimas. El histograma de estos resultados se muestra en la Figura 4.7, mientras que un resumen estadístico sobre los resultados es presentado a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	84.75
1er. cuartil:	4.750	Sesgo:	0.155
Mediana:	41.000	Kurtosis;	-1.695
3er. cuartil:	89.500	N:	30
Máximo	100		

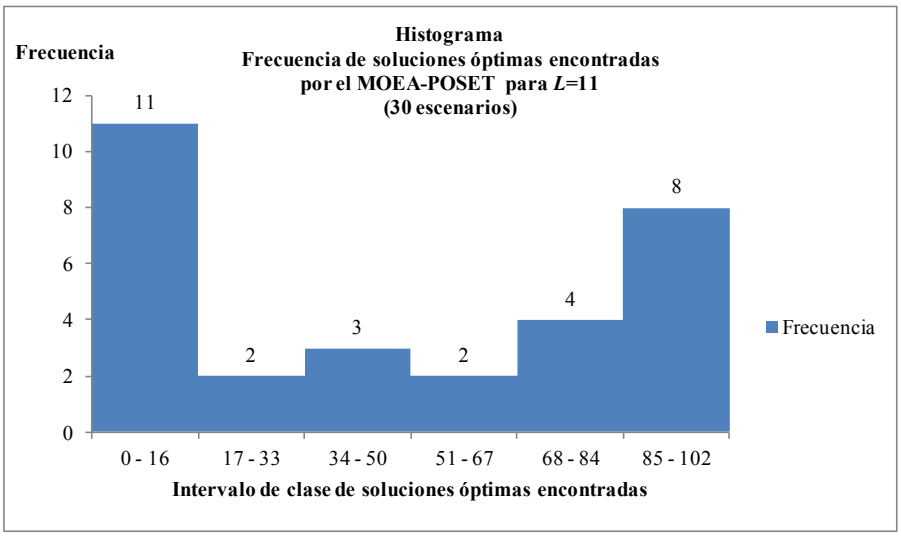


Figura 4.6. Histograma del estudio empírico para $L = 11$.
Fuente: Elaboración propia.

4.2.2.1 Resultados por el número de clases

En este apartado, se presenta el desempeño del MOEA-POSET, teniendo en cuenta el número de clases. Igualmente que con el factor anterior, de forma ocasional se relacionará con los otros 2 factores, es decir, con el factor L y el número de alternativas. Esto será desde el punto de vista de la distribución de frecuencias de las soluciones encontradas en los escenarios, definidos en este estudio empírico.

Para 3 clases ($F_2 = 3$), los valores preliminares para la construcción de la distribución de frecuencias fueron: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 96$, $rango = 4$, $intervalos\ de\ clase = 5$ y la $amplitud\ de\ clase = 1$. La Tabla 4.8 muestra los resultados para este número de clases.

Tabla 4.8. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 3 clases.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[96	-	97)	96.5	1	0.033	3.33%
2	[97	-	98)	97.5	3	0.100	10.00%
3	[98	-	99)	98.5	1	0.033	3.33%
4	[99	-	100)	99.5	1	0.033	3.33%
5	[100	-	101)	100.5	24	0.800	80.00%
					30	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la Tabla 4.8, de manera independiente de los valores de L y el número de alternativas, el MOEA-POSET encontró al menos 95 soluciones sin inconsistencias en cada uno de los 30 escenarios; donde en cada escenario, el MOEA-POSET se ejecutó 100 veces recibiendo esa cantidad de relaciones sobreclasificación valuadas. La Figura 4.8 muestra el histograma de estos resultados, mientras que un resumen con datos estadísticos se presenta a continuación:

Mínimo:	96	Rango intercuartil:	0
1er. cuartil:	100	Sesgo:	-2.008
Mediana:	100	Kurtosis;	2.665
3er. cuartil:	100	N:	30
Máximo	100		

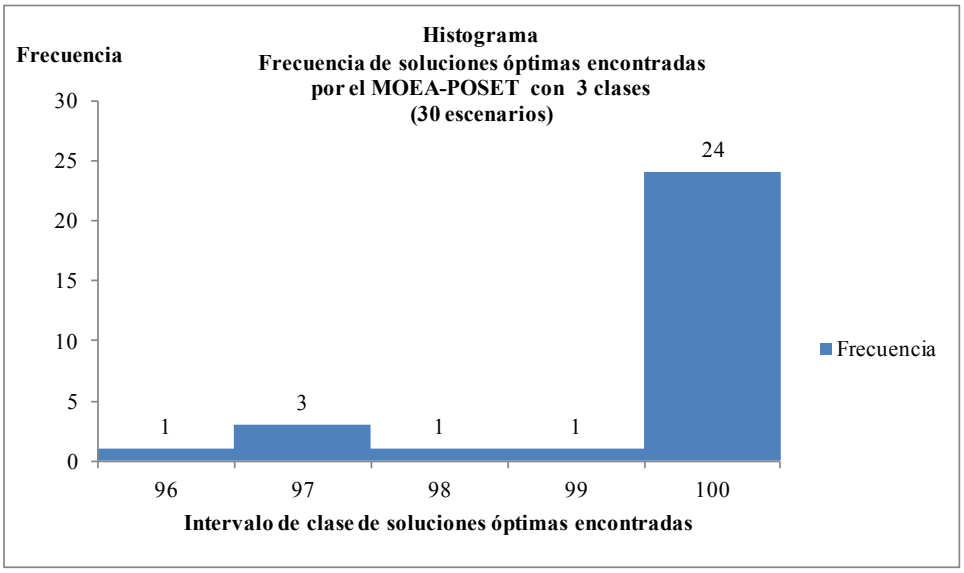


Figura 4.7. Histograma del estudio empírico con 3 clases.
Fuente: Elaboración propia.

Para 5 clases ($F_2 = 5$), los valores preliminares para la construcción de la distribución de frecuencias fueron: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 47$, $rango = 53$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y la $amplitud\ de\ clase = 9$. La Tabla 4.9 muestra los resultados para este número de clases.

Tabla 4.9. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 5 clases.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[47	-	56)	51.5	4	0.133	13.33%
2	[56	-	65)	60.5	3	0.100	10.00%
3	[65	-	74)	69.5	4	0.133	13.33%
4	[74	-	83)	78.5	6	0.200	20.00%
5	[83	-	92)	87.5	2	0.067	6.67%
6	[92	-	101)	96.5	11	0.367	36.67%
					30	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

El número de soluciones óptimas encontradas por el MOEA-POSET con este número de clases, fueron mayor que 50 en la mayoría de los 30 escenarios; sólo en dos de estos último no ocurrió: La primera fue con $L = 7$ y 120 alterativas, donde el algoritmo evolutivo encontró 47 soluciones sin inconsistencias. La segunda ocasión fue con $L = 11$ y 120 alternativas, donde MOEA-POSET encontró 48 soluciones óptimas. El histograma de estos resultados es mostrado en la Figura 4.9 y un resumen con datos estadísticos se presenta a continuación:

Mínimo:	47	Rango intercuartil:	32.250
1er. cuartil:	65.750	Sesgo:	-0.399
Mediana:	80.500	Kurtosis;	-1.132
3er. cuartil:	98.000	N:	30
Máximo	100		

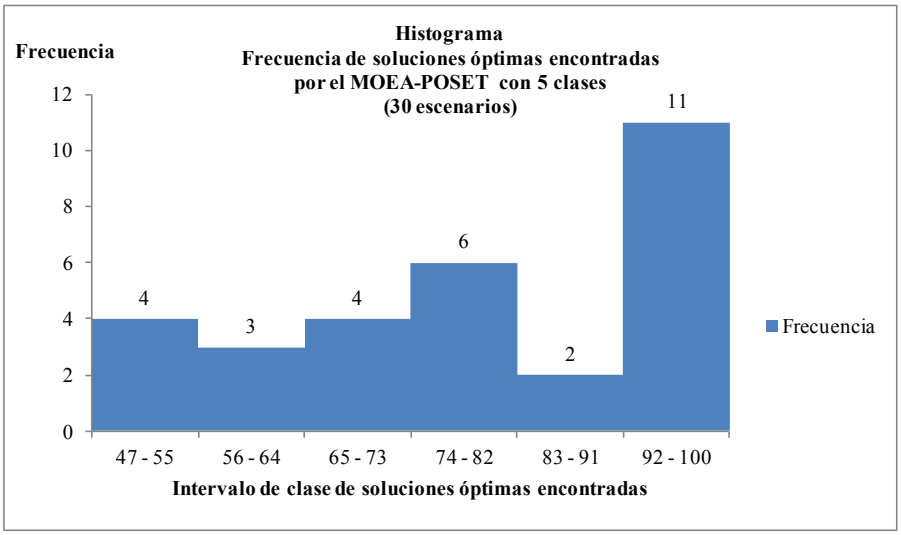


Figura 4.8. Histograma del estudio empírico con 5 clases.
Fuente: Elaboración propia.

Para 7 clases ($F_2 = 7$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron los siguientes: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 4$, $rango = 96$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y la $amplitud\ de\ clase = 16$. La Tabla 4.10 muestra los resultados del MOEA-POSET para este número de clases.

Tabla 4.10. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 7 clases.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[4	-	20)	12	3	0.100	10.00%
2	[20	-	36)	28	4	0.133	13.33%
3	[36	-	52)	44	4	0.133	13.33%
4	[52	-	68)	60	1	0.033	3.33%
5	[68	-	84)	76	9	0.300	30.00%
6	[84	-	100]	92	9	0.300	30.00%
					30	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

La cantidad de soluciones óptimas encontradas por el MOEA-POSET con 7 clases, fueron mayores o iguales a 50 en 19 de los 30 escenarios (63,33%). Hubo 2 escenarios donde el MOEA-POSET encontró las 100 soluciones sin inconsistencias, estos escenarios fueron con L = 3 con 30 y 60 alternativas. Por otro lado, hubo 3 escenarios donde las soluciones óptimas encontradas fueron entre 4 y 19. Dichos escenarios fueron con 15 alternativas con valores de $L = 7$, $L = 9$ y $L = 11$. El histograma con estos resultados se muestra en la Figura 4.10 y un resumen con datos estadísticos se presenta a continuación:

Mínimo:	4	Rango intercuartil:	49.000
1er. cuartil:	35.500	Sesgo:	-0.608
Mediana:	75	Kurtosis;	-1.032
3er. cuartil:	84.500	N:	30
Máximo	100		

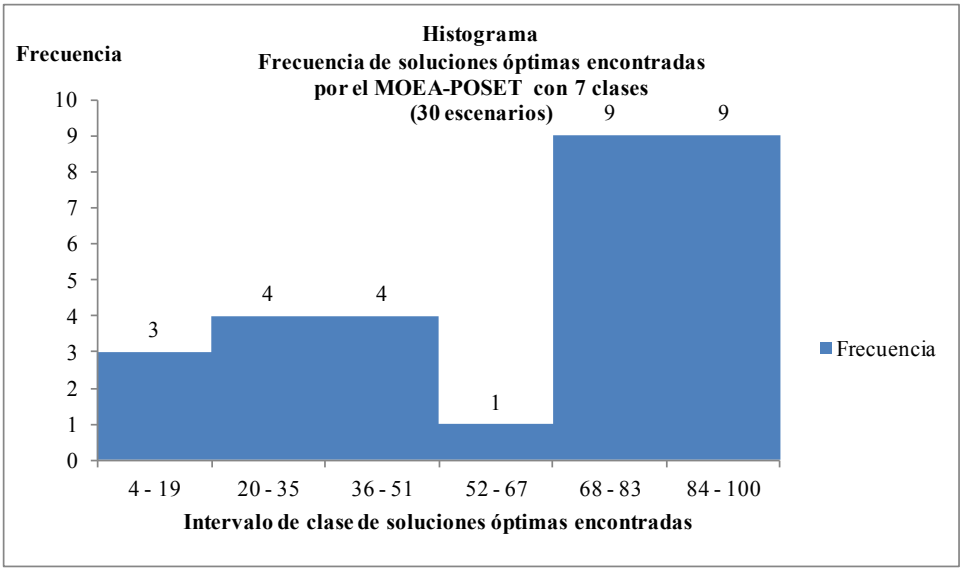


Figura 4.9. Histograma del estudio empírico con 7 clases.
Fuente: Elaboración propia.

Para 9 clases ($F_2 = 9$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron: número de escenarios $n = 30$, máximo $max = 90$, mínimo $min = 0$, $rango = 90$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y la $amplitud\ de\ clase = 16$. La Tabla 4.11 muestra los resultados del MOEA-POSET para este número de clases.

Tabla 4.11. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 9 clases.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	16)	8	9	0.300	30.00%
2	[16	-	32)	24	6	0.200	20.00%
3	[32	-	48)	40	7	0.233	23.33%
4	[48	-	64)	56	4	0.133	13.33%
5	[64	-	80)	72	1	0.033	3.33%
6	[80	-	96)	88	3	0.100	10.00%
					30	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

Con este número de clases, en la mayoría de los escenarios el MOEA-POSET encontró menos de 50 soluciones sin inconsistencias, este caso se dio en 22 de los 30 escenarios (73,33%). En 9 escenarios, el método encontró menos de 16 soluciones óptimas. De esos escenarios, 5 de ellos corresponden a 15 alternativas para $L = 3$, $L = 5$, $L = 7$, $L = 9$ y $L = 11$; 2 escenarios con 30

alternativas y valores de $L=9$ y $L=11$; los 2 escenarios restantes fue con 60 y 90 alternativas con $L=11$. Por otra parte, en 3 escenarios, el MOEA-POSET encontró entre 80 y 96 soluciones sin inconsistencias, 2 de ellos con $L=3$ con 30 y 60 alternativas; el otro fue con $L=5$ y 60 alternativas. El histograma de estos resultados se muestra en la Figura 4.11 y un resumen con datos estadísticos sobre dichos resultados, se presenta a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	43.500
1er. cuartil:	6.500	Sesgo:	0.590
Mediana:	31.500	Kurtosis;	-0.385
3er. cuartil:	50.000	N:	30
Máximo	90		

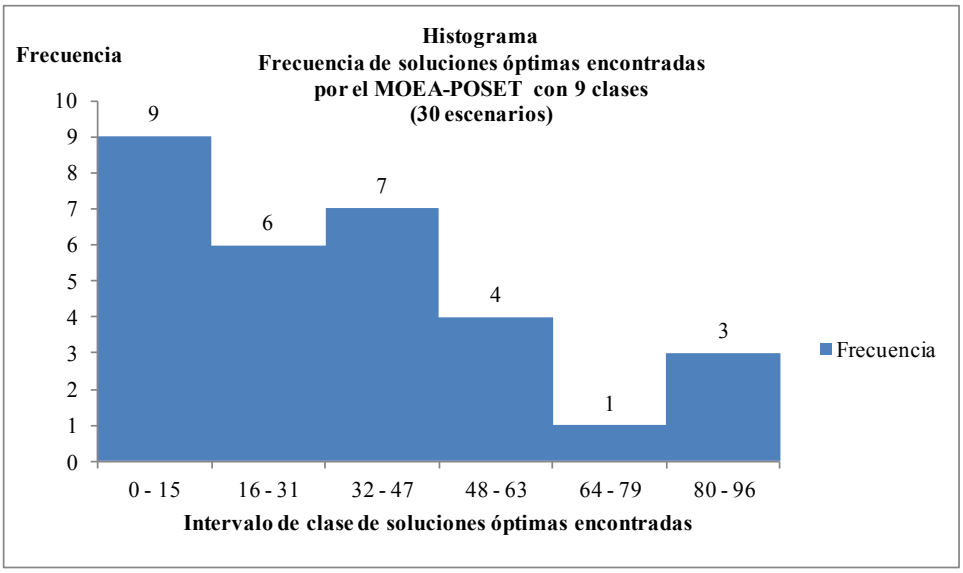


Figura 4.10. Histograma del estudio empírico con 9 clases.
Fuente: Elaboración propia.

Para 11 clases ($F_2=11$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron: número de escenarios $n=30$, máximo $max=85$, mínimo $min=0$, $rango=85$, $intervalos\ de\ clase=6$ y la $amplitud\ de\ clase=15$. La Tabla 4.12 muestra los resultados del MOEA-POSET para este número de clases.

Tabla 4.12. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 11 clases.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	15)	7.5	14	0.467	46.67%
2	[15	-	30)	22.5	7	0.233	23.33%
3	[30	-	45)	37.5	4	0.133	13.33%
4	[45	-	60)	52.5	2	0.067	6.67%
5	[60	-	75)	67.5	2	0.067	6.67%
6	[75	-	90)	82.5	1	0.033	3.33%
					30	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

Con este número de clases, en 25 de los 30 escenarios (83,33%), el MOEA-POSET encontró menos de 50 soluciones óptimas. En 14 escenarios, el método encontró menos de 15 soluciones sin inconsistencias, donde 5 de ellos fueron con 15 alternativas y valores de $L=3, L=5$ $L=7, L=9$ y $L=11$; 3 escenarios con 30 alternativas y valores de $L=7, L=9$ y $L=11$; 3 escenarios con 60 alternativas con valores de $L=7, L=9$ y $L=11$; los 3 escenarios restantes fue con 90, 120 y 150 alternativas para $L=11$. Por otro lado, el valor más alto de soluciones sin inconsistencias encontrado por el MOEA-POSET fue de 85, el cual corresponde a al escenario con 60 alternativas y $L=3$. El histograma de estos resultados es mostrado en la Figura 4.12, mientras que a continuación se presenta un resumen con datos estadísticos:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	33
1er. cuartil:	1.750	Sesgo:	1.102
Mediana:	16.000	Kurtosis;	0.687
3er. cuartil:	34.750	N:	30
Máximo	85		

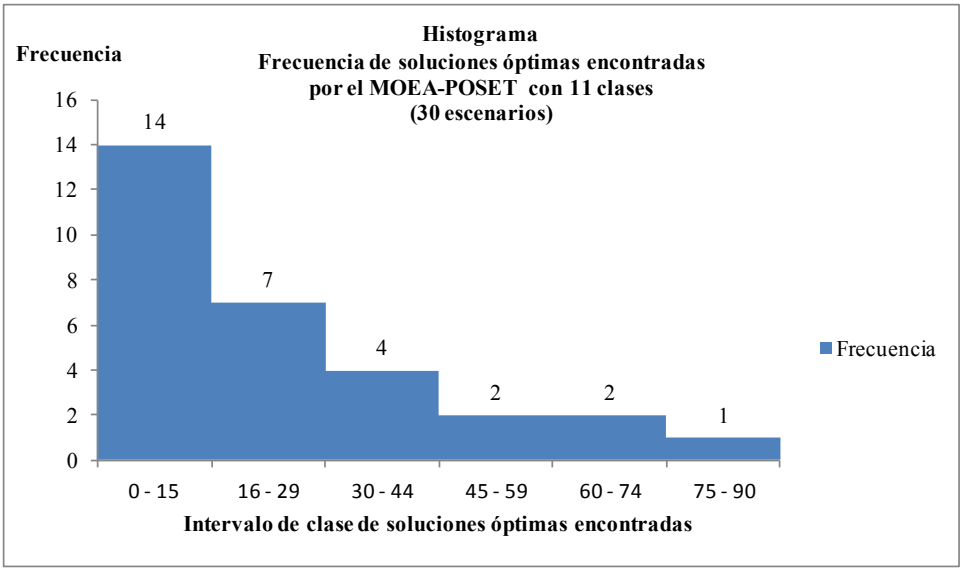


Figura 4.11. Histograma del estudio empírico con 11 clases.
Fuente: Elaboración propia.

4.2.2.1 Resultados por el número de alternativas

En este apartado, se presenta el desempeño del MOEA-POSET teniendo en cuenta el número de alternativas, relacionándolo de igual manera con el factor L y el número de clases.

Para 15 alternativas ($F_3 = 15$), los valores preliminares para construir la tabla descriptiva fueron los que se presenta a continuación: número de escenarios $n = 25$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 0$, $rango = 100$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 17$. La Tabla 4.13 muestra los resultados para este número de alternativas.

Tabla 4.13. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 15 alternativas

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	17)	8.5	13	0.520	52.00%
2	[17	-	34)	25.5	0	0.000	0.00%
3	[35	-	51)	42.5	1	0.040	4.00%
4	[51	-	68)	59.5	1	0.040	4.00%
5	[68	-	85)	76.5	2	0.080	8.00%
6	[85	-	102)	93.5	8	0.320	32.00%
					25	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

Con ese número de alternativas, en 14 de los 25 escenarios (56%), el MOEA-POSET encontró menos de 50 soluciones óptimas. En 10 de dichos escenarios, el algoritmo encontró cero o una sola solución sin inconsistencias, estos últimos fue con 9 y 11 clases. Por otra parte, el MOEA-POSET encontró todas las soluciones óptimas en 6 de los 25 escenarios (20%), esto corresponde a todos los escenarios con 3 clases y un escenario con 5 clases. El histograma de estos resultados es mostrado en la Figura 4.13 y un resumen de datos es mostrado a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	97
1er. cuartil:	0	Sesgo:	0.309
Mediana:	7	Kurtosis;	-1.884
3er. cuartil:	97	N:	25
Máximo	100		

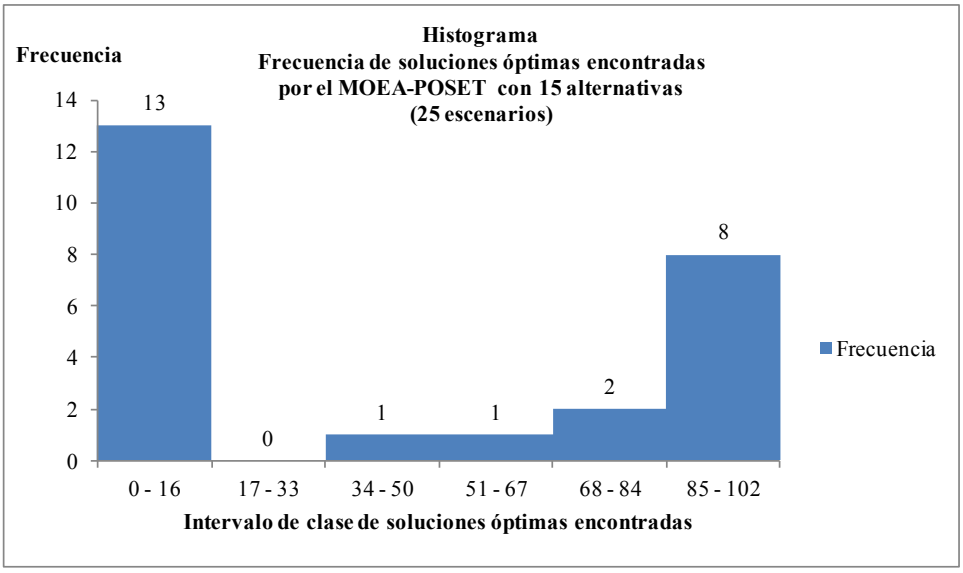


Figura 4.12. Histograma del estudio empírico con 15 alternativas.
Fuente: Elaboración propia

Para 30 alternativas ($F_3 = 30$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron: numero de escenarios $n = 25$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 2$, $rango = 98$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 17$. La Tabla 4.14 muestra los resultados para este número de alternativas.

Tabla 4.14. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 30 alternativas.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[2	-	19)	10.5	6	0.240	24.00%
2	[19	-	36)	27.5	2	0.080	8.00%
3	[36	-	53)	44.5	2	0.080	8.00%
4	[53	-	70)	61.5	1	0.040	4.00%
5	[70	-	87)	78.5	1	0.040	4.00%
6	[87	-	104)	95.5	13	0.520	52.00%
					25	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

Con estas 30 alternativas, en 15 de los 25 escenarios (60%) el MOEA-POSET encontró más de 50 soluciones óptimas. En 9 de los 13 escenarios del sexto intervalo, el método encontró todas las soluciones, lo cual representa el 36% de los 25 escenarios. El histograma con esos resultados es mostrado en la Figura 4.14 y un resumen estadístico es presentado a continuación:

Mínimo:	2	Rango intercuartil:	78
1er. cuartil:	22	Sesgo:	-0.538
Mediana:	87	Kurtosis;	-1.489
3er. cuartil:	100	N:	25
Máximo	100		

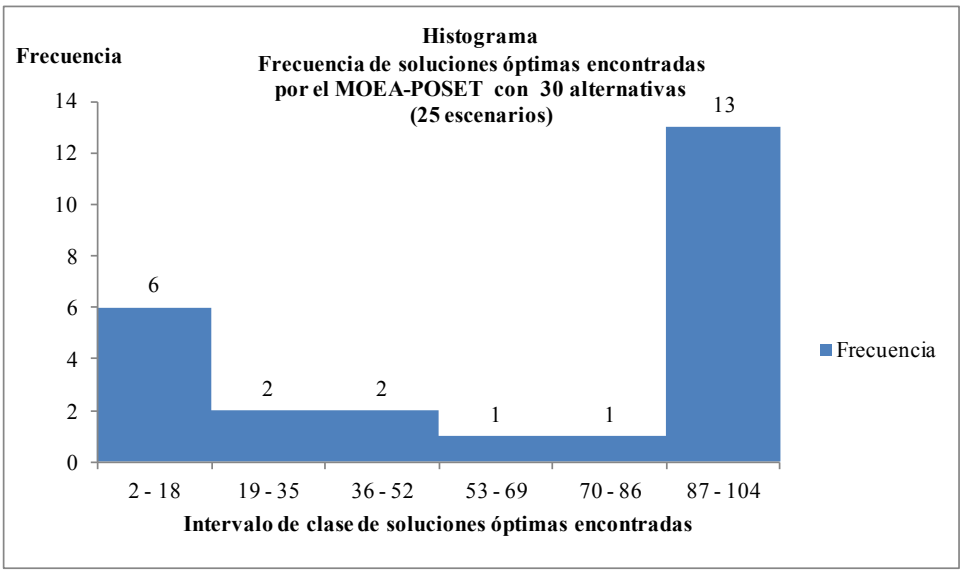


Figura 4.13. Histograma del estudio empírico con 30 alternativas.
Fuente: Elaboración propia.

Para 60 alternativas ($F_3 = 60$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron los que se presentan a continuación: numero de escenarios $n = 25$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 0$, $rango = 100$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 17$. La Tabla 4.15 muestra los resultados para este número de alternativas.

Tabla 4.15. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 60 alternativas.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[0	-	17)	8.5	4	0.160	16.00%
2	[17	-	34)	25.5	1	0.040	4.00%
3	[35	-	51)	42.5	2	0.080	8.00%
4	[51	-	68)	59.5	1	0.040	4.00%
5	[68	-	85)	76.5	2	0.080	8.00%
6	[85	-	102)	93.5	15	0.600	60.00%
					25	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

El MOEA-POSET con este número de alternativas, encontró al menos 50 soluciones óptimas en 19 de los 25 escenarios (76%). En 17 de esos escenarios, el algoritmo evolutivo encontró al menos 75 de ese tipo de soluciones, es decir, el 68% de los 25 escenarios. En ese mismo sentido, en 13 de los 25 escenarios, el MOEA-POSET encontró al menos 90 soluciones óptimas, distribuidas de la siguiente manera: un escenario con 90, uno con 95, uno con 96, dos con 98, tres con 99 y 5 con 100 soluciones sin inconsistencias. El histograma con estos resultados es mostrado en la Figura 4.15 y un resumen de datos estadísticos es presentado a continuación:

Mínimo:	0	Rango intercuartil:	55.500
1er. cuartil:	43.500	Sesgo:	-1.064
Mediana:	90	Kurtosis;	-0.455
3er. cuartil:	99.00	N:	25
Máximo	100		

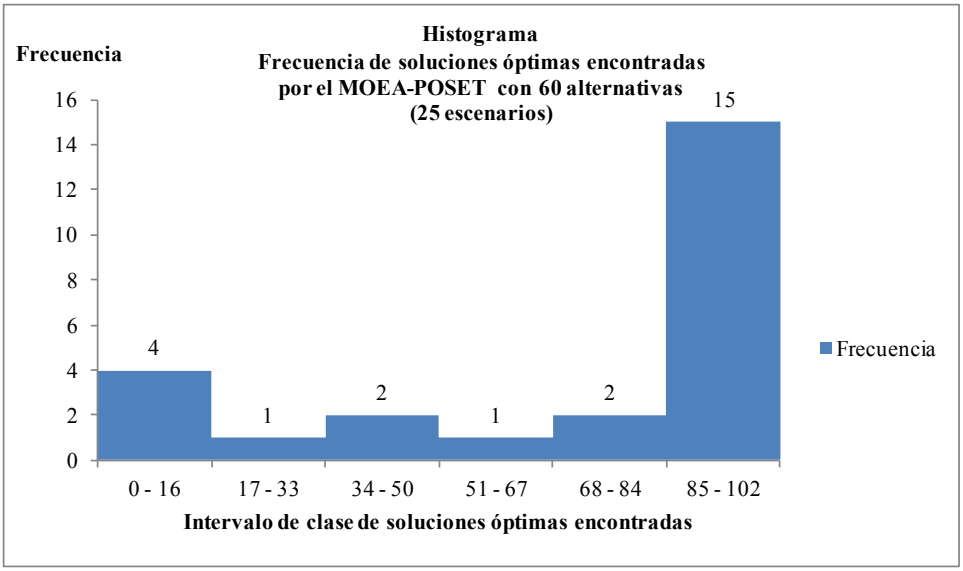


Figura 4.14. Histograma del estudio empírico con 60 alternativas.
Fuente: Elaboración propia.

Para 90 alternativas ($F_3 = 90$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron los siguientes: numero de escenarios $n = 25$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 4$, $rango = 96$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 17$. La Tabla 4.16 muestra los resultados para este número de alternativas.

Tabla 4.16. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 90 alternativas.

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[4	-	21)	12.5	3	0.120	12.00%
2	[21	-	38)	29.5	2	0.080	8.00%
3	[38	-	55)	46.5	2	0.080	8.00%
4	[55	-	72)	63.5	5	0.200	20.00%
5	[72	-	89)	80.5	8	0.320	32.00%
6	[89	-	106)	97.5	5	0.200	20.00%
					25	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

El MOEA-POSET con 90 alternativas encontró al menos 50 soluciones sin inconsistencias en 20 de los 25 escenarios (80%). En ese sentido, en 11 de los 25 escenarios (44%), dicho algoritmo encontró al menos 75 soluciones óptimas. En 5 escenarios, el MOEA-POSET encontró el 100% de las soluciones sin inconsistencias, este caso corresponde 3 clases con $L = 3$, $L = 5$ $L = 7$, $L = 9$ y $L = 11$. Por otro lado, los escenarios donde el MOEA-POSET encontró menos de

21 soluciones óptimas, fue una con 9 clases y $L = 11$, las otras dos con 11 clases y valores de $L = 9$ y $L = 11$. El histograma del desempeño del algoritmo con 90 alternativas es presentado en la Figura 4.16 y un resumen estadístico a continuación se presenta:

Mínimo:	4	Rango intercuartil:	48.500
1er. cuartil:	51.500	Sesgo:	0.757
Mediana:	72	Kurtosis:	-0.063
3er. cuartil:	83	N:	25
Máximo:	100		

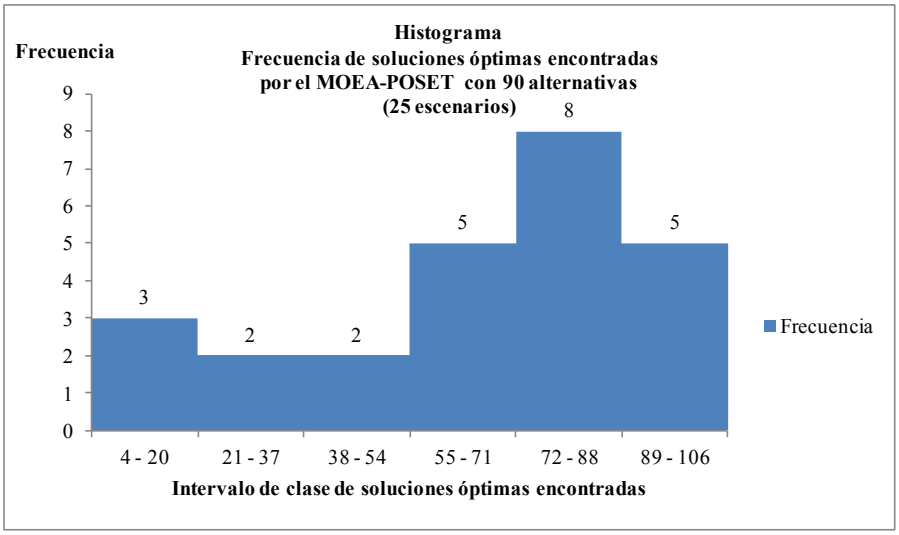


Figura 4.15. Histograma del estudio empírico con 90 alternativas.
Fuente: Elaboración propia.

Para 120 alternativas ($F_3 = 120$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron: numero de escenarios $n = 25$, máximo $max = 100$, mínimo $min = 13$, $rango = 87$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 15$. La Tabla 4.17 muestra los resultados para este número de alternativas.

Tabla 4.17. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 120 alternativas

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[13	-	28)	20.5	2	0.080	8.00%
2	[28	-	43)	35.5	5	0.200	20.00%
3	[43	-	58)	50.5	8	0.320	32.00%
4	[58	-	73)	65.5	0	0.000	0.00%
5	[73	-	88)	80.5	4	0.160	16.00%
6	[88	-	103)	95.5	6	0.240	24.00%
					25	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

Con ese número de alternativas, el MOEA-POSET encontró más 50 soluciones sin inconsistencias en 15 de los 25 escenarios (60%). En el mismo sentido, en 10 de los 25 escenarios el método logró obtener al menos 75 soluciones óptimas, lo cual representa el 40% del total de los escenarios. Además, en 5 escenarios el MOEA-POSET encontró 100 soluciones sin inconsistencias (20%). Estos últimos resultados, fueron con 3 clases y todos los valores posibles de L (3, 5, 7, 9 y 11). El escenario donde se encontró sólo 13 soluciones óptimas fue con 11 clases y $L = 11$. El histograma de estos resultados se muestra en la Figura 4.17 y el resumen con datos estadísticos es mostrado a continuación:

Mínimo:	13	Rango intercuartil:	47
1er. cuartil:	40	Sesgo:	0.134
Mediana:	53	Kurtosis:	-1.152
3er. cuartil:	87	N:	25
Máximo:	100		

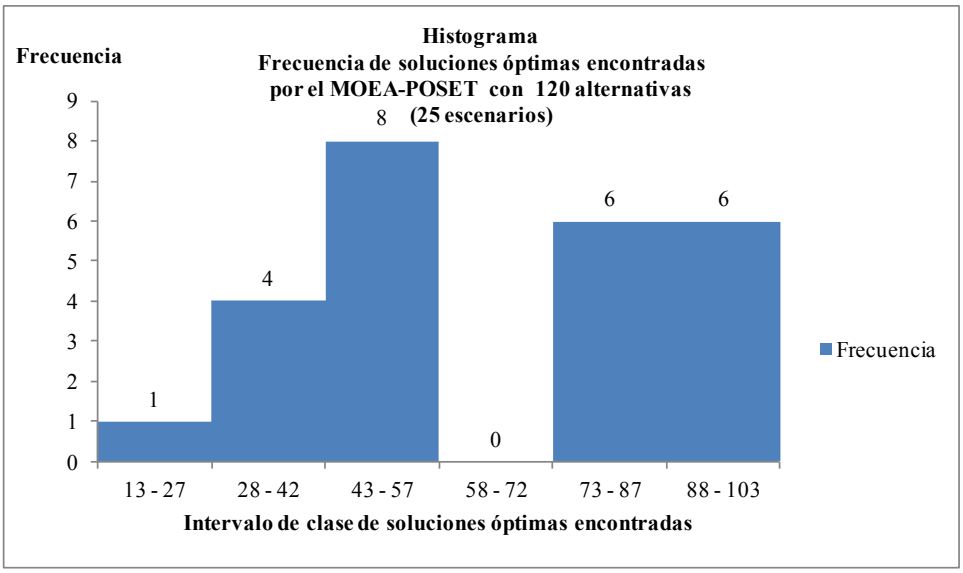


Figura 4.16. Histograma del estudio empírico con 120 alternativas.
Fuente: Elaboración propia.

Por último, para 150 alternativas ($F_3 = 150$), los valores preliminares para construir la tabla de distribución de frecuencias fueron los siguientes: numero de escenarios $n = 25$, máximo $max = 98$, mínimo $min = 13$, $rango = 86$, $intervalos\ de\ clase = 6$ y $amplitud\ de\ clase = 15$. La Tabla 4.18 muestra los resultados para este número de alternativas.

Tabla 4.18. Distribución de frecuencias de los resultados del MOEA-POSET con 150 alternativas

Intervalo	Intervalos de clase			Marca de clase (xi)	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia relativa (hi)	Frecuencia relativa (f%)
	Lim. inferior		Lim. superior				
1	[12	-	27)	19.5	9	0.360	36.00%
2	[27	-	42)	34.5	6	0.240	24.00%
3	[42	-	57)	49.5	0	0.000	0.00%
4	[57	-	72)	64.5	0	0.000	0.00%
5	[72	-	87)	79.5	5	0.200	20.00%
6	[87	-	102)	94.5	5	0.200	20.00%
					25	1.000	100.00%

Fuente: Elaboración propia.

Con ese número de alternativas, el MOEA-POSET logró encontrar al menos 50 soluciones óptimas en 10 de los 25 escenarios (40%). Esos resultados corresponden a 3 y 5 clases independientemente del valor de L. Con 3 clases, el método encontró más de 95 soluciones óptimas. Por otra parte, los 15 escenarios donde el MOEA-POSET encontró menos de 50 soluciones óptimas, corresponden a los escenarios con 7, 9 y 11 clases. El valor más bajo de soluciones sin inconsistencias encontrado fue con 11 clases y $L = 11$. El segundo más bajo fue de 20 soluciones óptimas con 7 clases y $L = 11$. El histograma de los resultados se muestra en la Figura 4.18 y el resumen con datos estadísticos se presenta a continuación:

Mínimo:	12	Rango intercuartil:	75
1er. cuartil:	23	Sesgo:	0.448
Mediana:	34	Kurtosis:	-1.704
3er. cuartil:	83	N:	25
Máximo:	98		

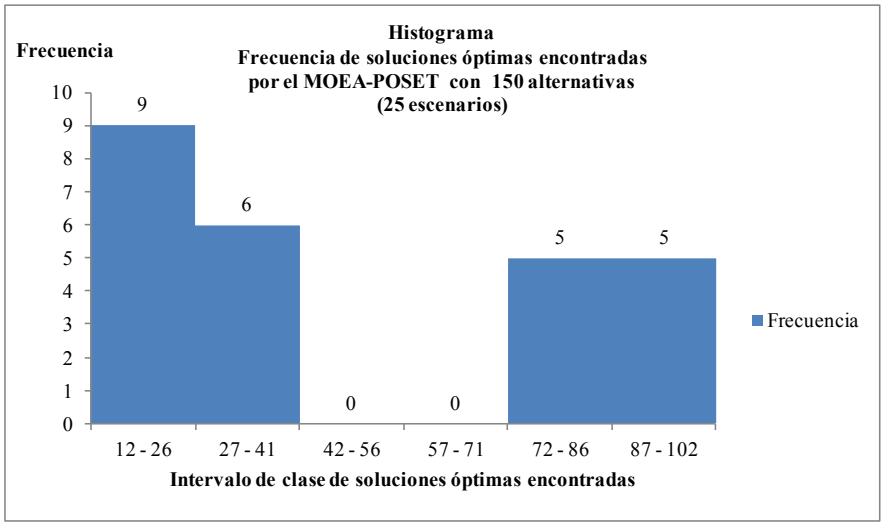


Figura 4.17. Histograma del estudio empírico con 150 alternativas.
Fuente: Elaboración propia.

4.3 Resultados de la prueba del método de destilación vs ordenamientos inducidos

Los resultados de la ejecución del método de destilación con las 210 relaciones de sobreclasificación valuadas, son presentados en la Tabla 4.19. Como se puede observar en dicha tabla, el método de destilación solamente pudo generar cuatro ordenamientos sin inconsistencias. En este caso, una inconsistencia se presenta cuando el tipo de relación entre dos alternativas en el ranking generado, no corresponde con la información contenida en la relación de sobreclasificación valuada para un nivel de corte determinado.

Los cuatro rankings obtenidos corresponden a ordenamientos de 3 clases con 15, 90, 120 y 120 alternativas. Esto es el 1.90% de efectividad del método ante las 210 relaciones de sobreclasificación valuadas. Ante este resultado, no se realizó un análisis mayor ni un comparativo contra el MOEA-POSET desarrollado.

Tabla 4.19. Resultados de la prueba: método de destilación vs rankings inducidos

Num. Clases	Num. Alternativas	Relaciones de sobreclasificación valuadas						
		1	2	3	4	5	6	7
3	15	0	0	**1**	0	0	0	0
3	30	0	0	0	0	0	0	0
3	60	0	0	0	0	0	0	0
3	90	0	0	0	**1**	0	0	0
3	120	**1**	0	**1**	0	0	0	0
3	150	0	0	0	0	0	0	0
5	15	0	0	0	0	0	0	0
5	30	0	0	0	0	0	0	0
5	60	0	0	0	0	0	0	0
5	90	0	0	0	0	0	0	0
5	120	0	0	0	0	0	0	0
5	150	0	0	0	0	0	0	0
7	15	0	0	0	0	0	0	0
7	30	0	0	0	0	0	0	0
7	60	0	0	0	0	0	0	0
7	90	0	0	0	0	0	0	0
7	120	0	0	0	0	0	0	0
7	150	0	0	0	0	0	0	0
9	15	0	0	0	0	0	0	0
9	30	0	0	0	0	0	0	0
9	60	0	0	0	0	0	0	0
9	90	0	0	0	0	0	0	0

9	120	0	0	0	0	0	0	0
9	150	0	0	0	0	0	0	0
11	15	0	0	0	0	0	0	0
11	30	0	0	0	0	0	0	0
11	60	0	0	0	0	0	0	0
11	90	0	0	0	0	0	0	0
11	120	0	0	0	0	0	0	0
11	150	0	0	0	0	0	0	0

Notas: Un valor de 1 indica que el método de destilación generó una solución sin inconsistencias respecto al ranking inducido. El valor de cero indica lo contrario.
Las valores del 1 al 7 corresponden a las relaciones de sobreclasificación valuadas proporcionadas al método de destilación.

Fuente: Elaboración propia.

4.4 Análisis de los resultados de las pruebas

Tomando el número de soluciones óptimas como la variable a contabilizar y teniendo en consideración que $L = 3$, el mejor desempeño del MOEA-POSET fue con 3 clases, al obtener 100%, 100%, 99%, 100%, 100% y 98% de soluciones sin inconsistencias para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. Por otro lado, el peor desempeño para este valor de L fue con 11 clases, donde el MOEA-POSET encontró 0%, 66%, 85%, 61%, 51% y 27% de soluciones sin inconsistencias, respectivamente para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas. La Figura 4.18 muestra los resultados obtenidos por el MOEA-POSET para $L = 3$.

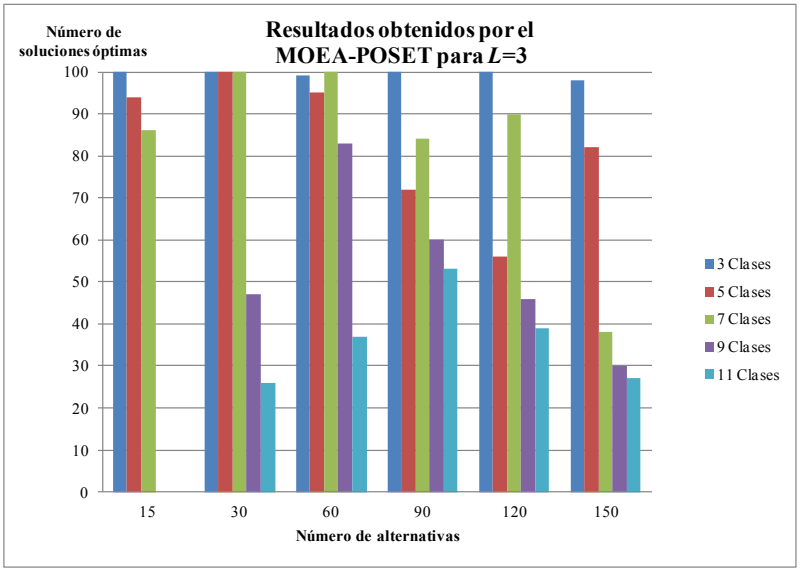


Figura 4.18. Resultados del MOEA-POSET para *L*=3
Fuente: Elaboración propia.

Nuevamente, considerando el número de soluciones óptimas encontradas como la variable a computar, con $L = 5$ el MOEA-POSET obtuvo el mejor desempeño con 3 clases, obteniendo 100%, 100%, 100%, 100%, 100% y 97% de soluciones sin inconsistencias para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. El peor caso para este valor de L fue nuevamente con 11 clases, donde el MOEA-POSET encontró 0%, 26%, 37%, 53%, 39% y 27% de soluciones sin incosistencias para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. La Figura 4.19 muestra el desempeño del MOEA-POSET para $L = 5$.

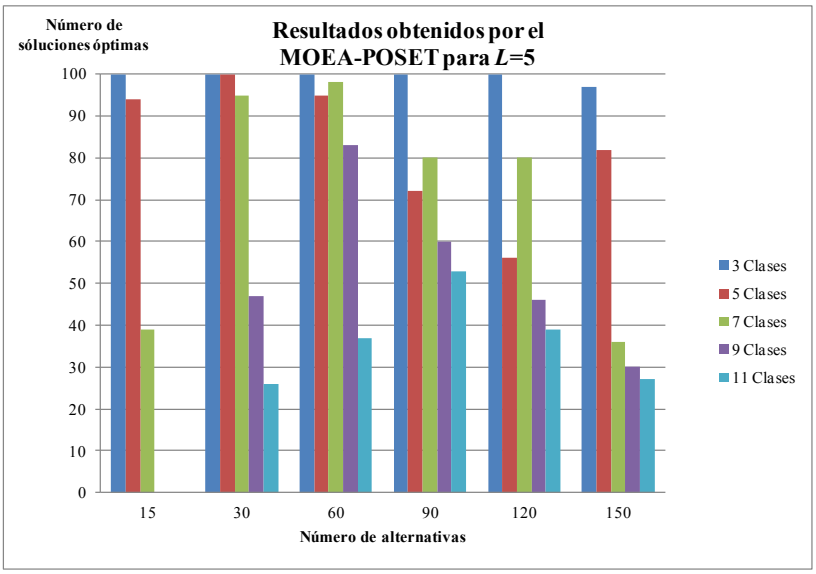


Figura 4.19. Resultados del MOEA-POSET para *L*=5
Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, para $L = 7$, el mejor desempeño del MOEA-POSET fue con 3 clases, obteniendo 100%, 100%, 100%, 100%, 100% y 97% de soluciones sin inconsistencias para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. Del mismo modo que con los anteriores valores de L, el peor desempeño del MOEA-POSET fue con 11 clases obteniendo 0%, 8%, 11%, 34%, 30% y 22% de las soluciones sin inconsistencias con 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. La Figura 4.20 muestra los resultados obtenidos por el MOEA-POSET para $L = 7$.

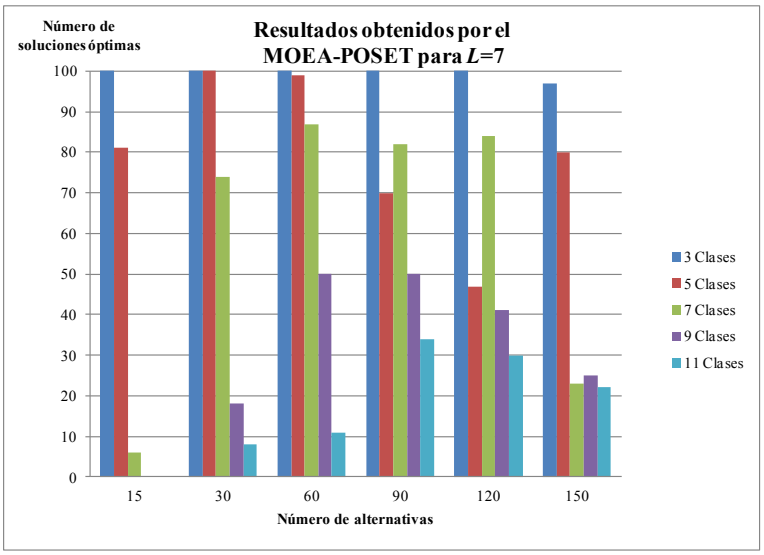


Figura 4.20. Resultados del MOEA-POSET para *L*=7
Fuente: Elaboración propia.

Por su parte, el mejor desempeño del MOEA-POSET para $L = 9$ fue con 3 clases, al obtener el 100%, 100%, 100%, 100%, 100% y 96% de soluciones soluciones sin inconsistencias respectivamente para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas. El peor caso del MOEA-POSET para este valor de L fue nuevamente con 11 clases, en este caso, se obtuvieron el 0%, 4%, 1%, 15%, 17% y 22% de soluciones sin inconsistencias para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. La Figura 4.21 muestra los resultados obtenidos por el MOEA-POSET con $L = 9$.

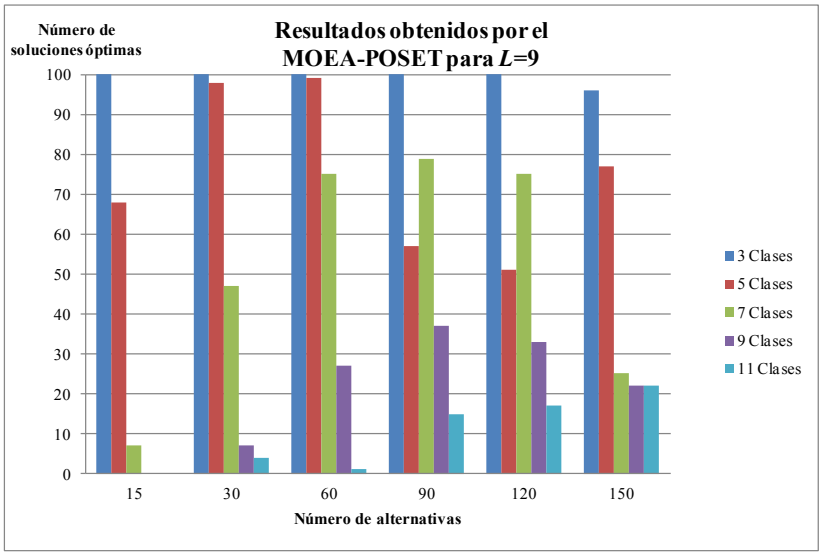


Figura 4.21. Resultados del MOEA-POSET para *L*=9
Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, para $L = 11$, se conservó la tendencia de que con 3 clases se obtuvieron los mejores resultados de la ejecución del MOEA-POSET. Para este valor de L, el método logró encontrar 100%, 100%, 100%, 100%, 100% y 97% de soluciones sin inconsistencias para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. Por otro lado, el peor desempeño del MOEA-POSET fue con 11 clases, logrando encontrar 0%, 2%, 0%, 4%, 13% y 12% de soluciones sin inconsistencias para 15, 30, 60, 90, 120 y 150 alternativas respectivamente. La Figura 4.22 muestra los resultados obtenidos por el MOEA-POSET con $L = 11$.

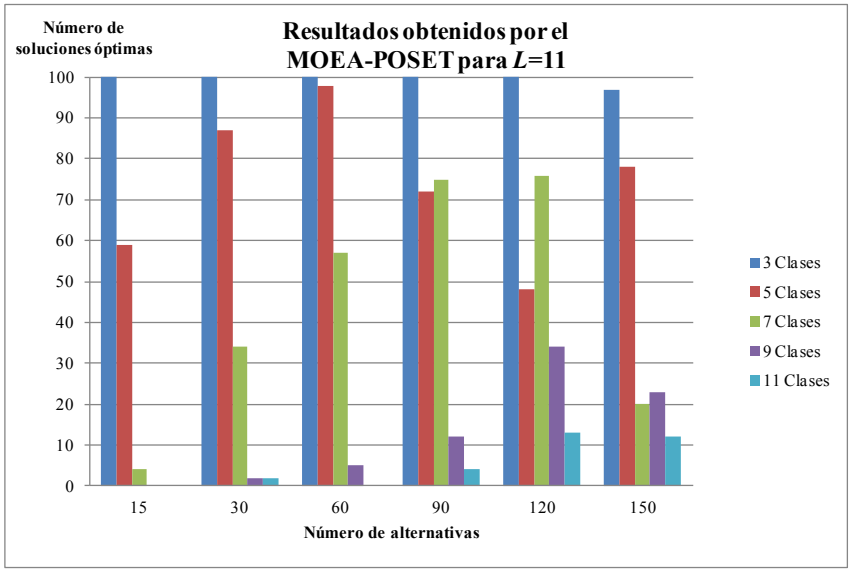


Figura 4.22. Resultados del MOEA-POSET para *L*=11
Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en lo presentado en este apartado, tomando en consideración el factor L, el mejor desempeño del MOEA-POSET fue con $L = 3$; con el cual, el método encontró 2,234 soluciones óptimas de 3,000 posibles, lo que representa el 74.46%. El porcentaje de ese tipo de soluciones encontradas por el MOEA-POSET con 150 alternativas y ese valor de L, fue de 98%

Por otro lado, si se considera el número de clases como el centro del análisis, el mejor desempeño logrado por el MOEA-POSET fue con 3 clases. Independientemente del valor de L y del número de alternativas, con este número de clases el método encontró 2,984 soluciones sin inconsistencias de 3,000 posibles, representado esto un 99.47%.

Sin embargo, si se toma como centro del análisis al número de alternativas, el mejor desempeño del MOEA-POSET fue alcanzado con 60 alternativas. Independientemente del valor de L y del número de clases, el método logró encontrar 1772 soluciones óptimas de 2,500 posibles, lo cual representa un 71.68% de ellas.

En la evaluación empírica descrita, se encontró que en la mayoría de las simulaciones donde el número de soluciones óptimas fue menor ó cercano a 50, el MOEA-POSET marcó tendencia de no convergencia[22]. Por ello, para conocer si ese comportamiento fue debido al insuficiente número de generaciones ó porque durante las ejecuciones del MOEA-POSET quedó atrapado en óptimos locales, el éste fue ejecutado nuevamente con un número mayor de generaciones.

Para esa nueva serie de ejecuciones, se seleccionaron aleatoriamente 26 de 88 (29.55%), escenarios con rendimiento menor o igual a 50 soluciones óptimas. El MOEA-POSET fue ejecutado con 50,000 generaciones, debido que el algoritmo inicialmente fue diseñado con un método de reemplazo paso a paso, el cual corresponde a que sólo se agrega un nuevo descendiente a la población en cada generación. Los resultados de las nuevas ejecuciones del algoritmo evolutivo se muestran en la Tabla 4.20:

Tabla 4.20. Desempeño del MOEA-POSET con 5,000 y 50,000 generaciones.

Factor L	Clases	Alternativas	Soluciones Encontradas sin Inconsistencias en 5,000 Generaciones	Soluciones Encontradas sin Inconsistencias en 50,000 Generaciones	Diferencia	Proporción
3	9	15	1	49	48	4800%
5	7	15	39	91	52	133%
5	9	30	47	86	39	83%
5	11	30	26	64	38	146%
7	9	30	18	74	56	311%
7	9	90	50	100	50	100%
7	11	30	8	41	33	413%
7	11	90	34	90	56	165%
9	7	15	7	48	41	586%
9	7	30	47	76	29	62%
9	9	30	7	48	41.	586%
9	9	60	27	80	53	196%

[22] La no convergencia de un algoritmo evolutivo, se refiere a que dicho algoritmo no logra encontrar soluciones del conjunto de soluciones óptimas de un problema en particular.

9	9	90	37	96	59	159%
9	9	120	33	85	52	158%
9	11	30	4	68	64	1600%
9	11	60	1	56	55	5500%
9	11	120	17	82	65	382%
11	7	15	4	29	25	625%
11	7	30	34	85	51	150%
11	7	60	57	93	36	63%
11	9	60	5	70	65	1300%
11	9	150	23	100	77	335%
11	11	30	2	23	21	1500%
11	11	60	0	45	45	-
11	11	90	4	71	67	1675%
11	11	150	12	91	79	658%

Nota: El MOEA-POSET fue ejecutado en diferentes escenarios recibiendo 100 relaciones de sobreclasificación valuadas en cada uno de ellos.

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la Tabla 4.18, en todos los escenarios el MOEA-POSET pudo encontrar mejores resultados con 50,000 generaciones en comparación con 5,000 generaciones. En 19 de los 26 escenarios seleccionados, el MOEA-POSET encontró más de 50 soluciones óptimas. Además, éste encontró más de 75 soluciones sin inconsistencias en 13 de los 26 escenarios. En este sentido, en 7 de los 26 escenarios, el número de soluciones óptimas encontradas por el MOEA-POSET fue mayor o igual a 90. En dos escenarios, el método encontró todas las soluciones óptimas. El primero de estos casos fue con $L = 7$, 9 clases y 90 alternativas, donde con 5,000 generaciones, el MOEA-POSET había encontrado 50 soluciones sin inconsistencias. El segundo caso fue con $L = 11$, 9 clases y 150 alternativas, donde el método encontró 23 soluciones óptimas en las 5.000 generaciones. La Figura 4.23 muestra los resultados de esta comparación.

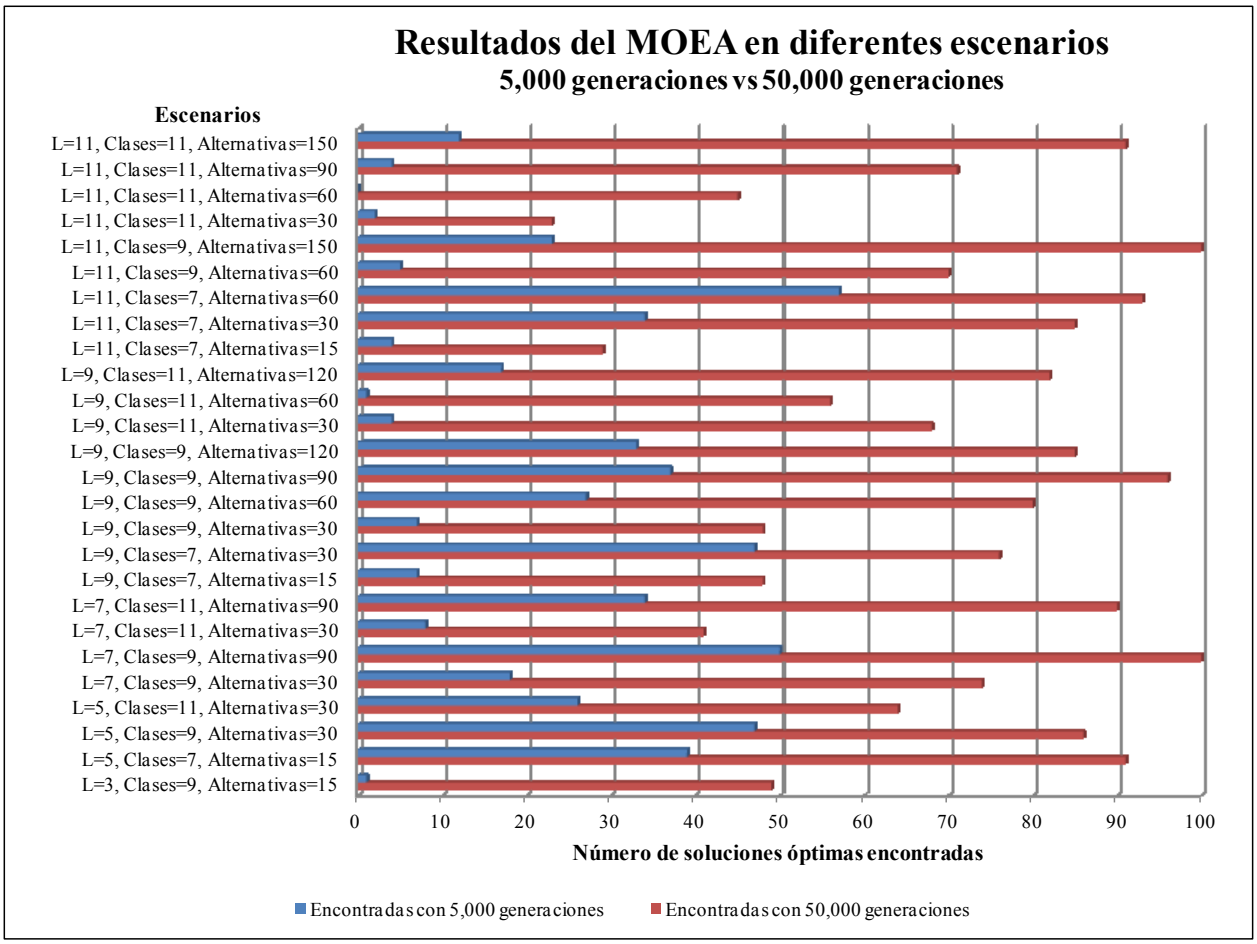


Figura 4.23. Resultados del MOEA-POSET con 5,000 y 50,000 generaciones.
Fuente: Elaboración propia.

Tomando en consideración los resultados de las dos validaciones empíricas, se puede concluir que la no convergencia observada del MOEA-POSET con 5,000 generaciones fue debido a su método de reemplazo de la población y no porque haya quedado atrapado en óptimos locales. Para esta versión del MOEA-POSET, 5,000 generaciones una cantidad pequeña debido a su método de reemplazo y el tamaño del problema. Es por ello, que el MOEA-POSET mostró una mejora en el número de soluciones óptimas encontradas cuando se definieron 50,000 generaciones.

Se encontró además, que en la medida que el número de clases se incrementa, el algoritmo tuvo dificultades para encontrar las soluciones sin inconsistencias. Esto es debido a que la complejidad del problema se incrementa y el algoritmo, por su método de reemplazo de la población, no alcanzaba a converger a las soluciones óptimas. Por otro lado, no se observa que el

algoritmo haya tenido problemas evidentes por el aumento del número de alternativas, ya que con 150 alternativas y 3 clases obtuvo 98, 97, 97, 96 y 97 soluciones óptimas para $L = 3$, $L = 5$, $L = 7$, $L = 9$ y $L = 11$ respectivamente. Con 5 clases encontró 84, 82, 80, 77 y 78 soluciones sin inconsistencias con cada valor de L respectivamente.

Por otro lado, en la prueba realizada con el método de destilación utilizando una muestra de 210 relaciones de sobreclasificación valuadas, con el objetivo de conocer si este método de ordenamiento era capaz de encontrar soluciones sin inconsistencias, se encontró que tiene problemas con el número de alternativas, sobre todo cuando se aumenta el número de clases, de manera similar al MOEA-POSET. Sin embargo, este último como se presentó en el párrafo anterior, pudo encontrar prácticamente todas soluciones sin inconsistencias con 150 alternativas y 3 clases.

En el 100% de los escenarios de la muestra utilizada para el método de destilación (ver Tabla 4.35), el MOEA-POSET encontró la solución óptima en cada una de las 7 relaciones de sobreclasificación valuadas, excepto con 15 alternativas y 11 clases. Sin embargo, en ese mismo escenario, el método de destilación tampoco pudo generar las soluciones óptimas para cada una de dichas relaciones. Tomando en consideración los resultados obtenidos en esta prueba, se afirma que cuando existe al menos una solución optima en un problema en particular, con el algoritmo evolutivo multiobjetivo propuesto se pueden encontrar ese tipo de soluciones en mayor medida que con el método de destilación.

Capítulo 5 . Estudio de caso: Ordenamiento de solicitantes de crédito en una empresa parafinanciera

En este capítulo se presenta un estudio de caso real, relacionado a la comparación de los perfiles crediticios de clientes de una empresa parafinanciera[23]. También, se presenta la contextualización y formulación del problema. Se detalla además, el modelo de evaluación multicriterio para la solución del mismo. Este modelo permite tomar en cuenta múltiples dimensiones que integran dicho problema.

Las alternativas de solución tomadas en consideración para la evaluación del modelo, consisten en un conjunto de clientes de la empresa Green Side, ubicada en el municipio de Ahome, Sinaloa, México.

5.1. Contexto del estudio

Green Side es una empresa proveedora de servicios e insumos agrícolas, que proporciona servicios de financiamiento a productores agrícolas de la región norte del estado de Sinaloa, México.

En cada ciclo de siembra agrícola, Green Side, se enfrenta al problema de definir a cuales productores agrícolas les otorga crédito para la siembra de granos: maíz, frijol, sorgo, garbanzo y trigo. Regularmente, la suma de los montos de todas las solicitudes de crédito excede el límite de fondos de Green Side. En cada ocasión, la empresa debe analizar los registros de cada uno de los clientes solicitantes para determinar si otorga o no el crédito.

Actualmente, el proceso de selección de los clientes con mejor perfil crediticio, es llevado a cabo con base a la experiencia y al sentido común (método de prueba y error), es decir, no se utiliza método objetivo alguno que permita aminorar el riesgo de otorgar crédito a clientes con perfil crediticio deficiente y/o no otorgar crédito a clientes con buen perfil crediticio, ya sea por

[23] Personas físicas o morales del sector privado, acreditadas de los Intermediarios Financieros, que por su capacidad de gestión, poder de negociación y posicionamiento en el mercado, facilitan el acceso, distribución y recuperación de crédito, recursos y/o servicios a productores y empresarios (acreditados finales) de los sectores que atiende FIRA (Fideicomisos Instituidos en Relación con la Agricultura), que en forma individual enfrentan obstáculos para tener acceso a estos servicios (Financiera Rural, 2014).

no haber sido evaluado adecuadamente o por haberse agotado el fondo financiero disponible de Green Side, por haber asignado a clientes con menor perfil crediticio.

El objetivo Green Side, es adoptar y utilizar una metodología que le permita enfocarse en aquellos clientes con mejor perfil crediticio, utilizando un ordenamiento de los mismos en sentido decreciente, con base dicho perfil, con el fin de otorgar crédito hasta agotar el fondo financiero disponible con el que cuenta la empresa.

5.2. Configuración del proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios

En un proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios, existe una serie de actividades de flujo continuo entre las diferentes fases de dicho proceso. Similar al proceso de decisión de Simon (1977), se puede retornar a cualquier fase en cualquier momento si se considera pertinente y es iterativo. Es decir, si el tomador de decisiones no está de acuerdo con el resultado de cualquier fase, éste puede regresar a la fase correspondiente y realizar cambios. El esquema general del proceso de apoyo para la toma de decisiones multicriterio de este estudio de caso, está basado en Leyva *et* al., (2013b) y es mostrado en la Figura 5.1.

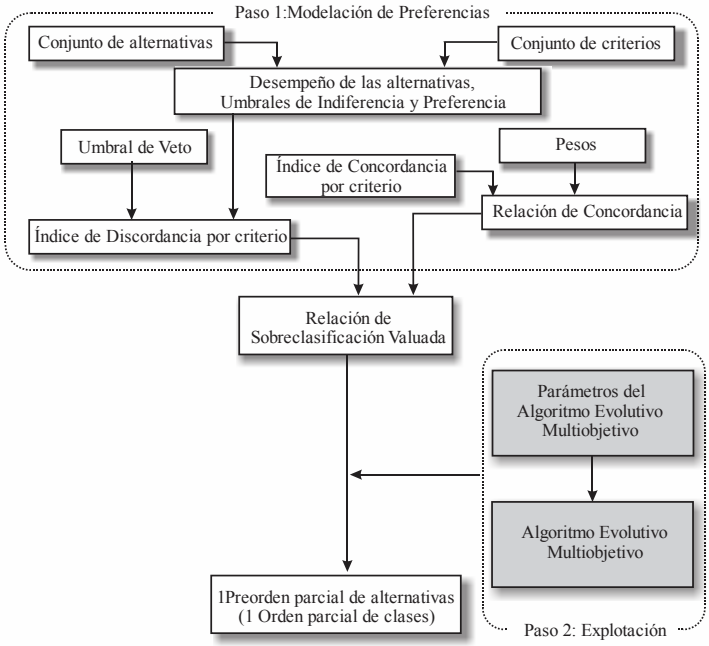


Figura 5.1. Proceso de apoyo para la toma de decisiones con múltiples criterios del estudio.
Fuente: Adaptado de Leyva *et* al. (2013b).

5.3 Fuente de datos

Los datos utilizados en este estudio de caso, fueron proporcionados por la empresa Green Side. El conjunto de alternativas está compuesto por 105 productores agrícolas de cultivos de frijol, maíz, garbanzo y trigo del ciclo 2013-2014 pertenecientes a los municipios de Ahome, El Fuerte y Salvador Alvarado. Cada productor del conjunto es considerado un cliente de la empresa. En este trabajo, cada cliente es considerado una alternativa de solución. El conjunto de 105 alternativas de este estudio, representa apropiadamente un conjunto de tamaño mediano de alternativas; lo cual permite evaluar el desempeño del algoritmo evolutivo propuesto. Por confidencialidad, los nombres de los clientes de Green Side, no son presentados en este estudio.

5.4 Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación tomados en consideración en este estudio, son tanto de carácter objetivo como subjetivo. Estos criterios son presentados en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Criterios tomados en consideración en el estudio de caso.

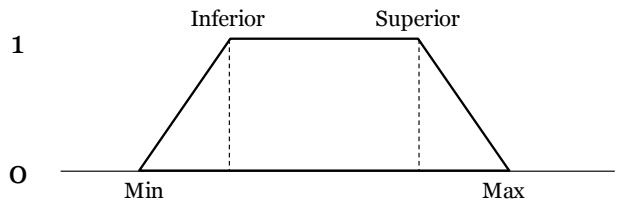
Etiqueta	Criterio	Orientación
g_1	Cantidad de hectáreas	Max
g_2	Tipo de cultivo	Max
g_3	Antigüedad de crédito en años	Max
g_4	Tipo de garantía	Max
g_5	Ubicación del predio en kilómetros	Min
g_6	Tiempo de arraigo en la comunidad	Max
g_7	Morosidad del cliente	Min
g_8	Dictamen técnico del predio	Max

Fuente: Elaboración propia.

g_1. Cantidad de hectáreas:

Es la cantidad de hectáreas que el productor tiene disponible para siembra en el ciclo agrícola. Para Green Side, existe un rango de hectáreas deseable, el cual es de 20 a 30 hectáreas. La dirección de este criterio es a maximizar.

Para este criterio se utilizó una *función de curva trapezoidal* para cada cantidad de hectáreas de los productores. Esta función depende de cuatro parámetros escalares, los cuales, para este caso, son definidos como: **Min, Inferior, Superior y Max**.



donde:

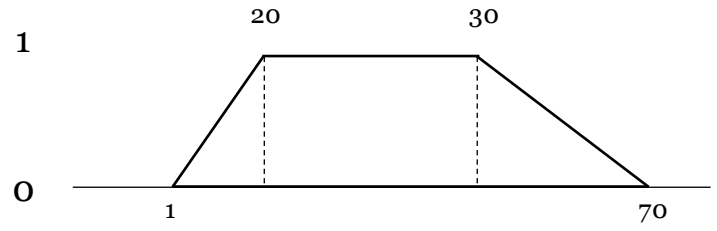
Min es el número de hectáreas mínimo posible.
Inferior es el número de hectáreas definido como límite inferior deseable.
Superior es el número de hectáreas definido como límite superior deseable.
Max es el número de hectáreas máximo posible.

Para un determinado número de hectáreas x, la función trapezoidal fue definida como:

Hectáreas(x, Min, Inferior, Superior, Max)

$$\text{Hectareas} = \begin{cases} 0 & , \ x < \min \\ (x - \min) / (\text{inferior} - \min) & , \ \min \leq x < \text{inferior} \\ 1 & , \ \text{inferior} \leq x \leq \text{superior} \\ (\max - x) / (\max - \text{superior}) & , \ \text{superior} < x \leq \max \\ 0 & , \ x > \max \end{cases}$$

Para este estudio, los valores de los parámetros escalares de la función trapezoidal fueron definidos como sigue: Min = 1, Inferior = 20, Superior = 30 y Max = 70.



g_2. Tipo de cultivo:

Tipo de cultivo que el productor agrícola pretende sembrar en su predio. Los cultivos a los que Green Side puede otorgar crédito son: frijol, maíz, trigo, garbanzo y sorgo.

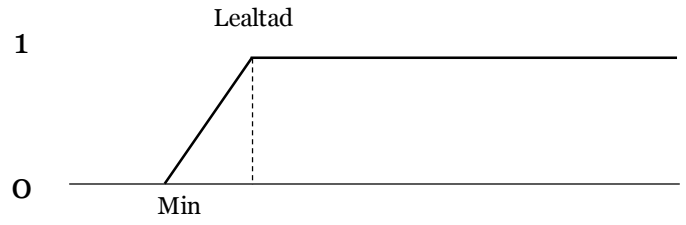
Debido a que Green Side, para la temporada agrícola 2013-2014, especificó un orden de preferencia en los tipos de cultivo, para este criterio se definió una escala ordinal discreta del 1 al

5, donde el maíz tuvo el valor más alto (maíz = 5) y el frijol el más bajo (frijol = 1). La orientación de este criterio es a maximizar.

1. Maíz
2. Garbanzo
3. Sorgo
4. Trigo
5. Frijol

g_3. Antigüedad del crédito en años:

Tiempo en años que el productor agrícola tiene como cliente de Green Side. Un cliente con mayor número de años es preferido a otro con menor número. Sin embargo, a partir de 7 años los productores son considerados como leales a la empresa y por tanto, hay una indiferencia entre cualquier par de productores que tengan al menos dicho número de años. Este criterio puede fue definido como sigue:



donde:
Min es el número de años mínimo posible como cliente de Green Side.
Lealtad es el número de años mínimo para ser considerado como cliente leal.

Para un determinado número de años de antigüedad x, la función para este criterio fue definida como:

Antigüedad(x, Min, Lealtad)

$$\text{Antigüedad} = \begin{cases} (x - \min) / (\text{lealtad}-\min) & , \min \leq x < \text{lealtad} \\ 1 & , x \geq \text{lealtad} \end{cases}$$

g_4. Tipo de garantía:

Cada productor que solicita crédito en Green Side debe firmar un contrato de garantía. Siendo la orientación de este criterio a maximizar, se definió una escala ordinal discreta del 1 al 3, la cual es presentada a continuación:

1. Usufructuaria[24]
2. Hipotecaria[25]
3. Prendaria[26]

g_5. Ubicación del predio en kilómetros:

Distancia en kilómetros entre la ubicación del predio del productor donde se sembrará y el centro de distribución más cercano de Green Side. Hay tres centros de distribución en el norte del estado. Este criterio tiene orientación a minimizar y la obtención de la distancia menor está definida como sigue:

$$d(x) = \min(c_1(x), c_2(x), c_3(x))$$

donde:
x: es la ubicación del predio del productor.
c_n: es la distancia en kilómetros entre el centro de distribución n de Green Side y el predio del productor x.

g_6. Tiempo de arraigo en la comunidad:

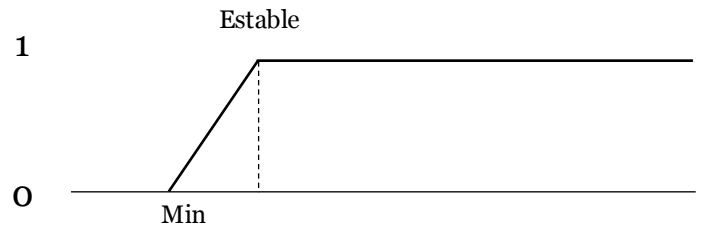
Tiempo en años que el productor tiene residiendo en su comunidad. Para Green Side considera importante tener clientes que vivan en su comunidad, porque de una manera u otra les garantiza su permanencia en su comunidad durante el periodo del préstamo. A partir de 7 años residiendo

[24] "En la legislación civil es el derecho real que otorga al usuario la facultad de percibir los frutos de una cosa ajena, las que basten a cubrir sus necesidades y las de su familia. Cuando se traspasa a un tercero en forma temporal el derecho de uso y disfrute de la cosa, bajo la forma de un derecho real toma el nombre de usufructo. Al titular de este nuevo derecho se le designa con el nombre de usufructuario y de nudo propietario al titular del derecho de dominio. El usufructuario adquiere la facultad de hacer suyo todo lo que produce el bien, con la obligación de mantener su sustancia. En materia agraria, estos conceptos se relacionan con los derechos que tienen los ejidatarios, comuneros y en ocasiones posesionarios sobre las tierras ejidales o comunales, que les permiten el uso y usufructo de sus terrenos por contar con un documento o acuerdo de asamblea que amparan estos derechos" (SRA, 2014).

[25] "La hipoteca es una garantía real, es decir, un gravamen sobre un inmueble, que no se entrega al acreedor y le da derecho, de que en caso de incumplimiento de la obligación que se está garantizando, se le pague con el valor de los bienes" (CONDUCEF, 2014).

[26] De acuerdo al Código Civil Federal "La prenda es un derecho real constituido sobre un bien mueble enajenable para garantizar el cumplimiento de una obligación y su preferencia en el pago" (IIJ-UNAM, 2014).

en su comunidad, los productores son considerados como arraigados o estables y por tanto, hay una indiferencia entre cualquier par de productores que tengan al menos dicho número de años. Este criterio tiene orientación a maximizar y está definido de la siguiente manera:



donde:
Min: es el número de años mínimo posible.
Estable: es el número de años mínimo para ser considerado como cliente arraigado.

Para un determinado número de años de tiempo de arraigo x, la función para este criterio fue definida como:

TiempoArraigo(x, Min, Estable)

$$\text{TiempoArraigo} = \begin{cases} (x - \min) / (\text{estable-min}) & , \min \leq x < \text{estable} \\ 1 & , x \geq \text{estable} \end{cases}$$

g_7. Morosidad del cliente:

Es un estatus que Green Side les otorga a los clientes en dependencia de su puntualidad para realizar los pagos de su crédito. A este criterio está definido en una escala ordinal, la cual está asociada a valores discretos entre 1 y 5. La orientación de este criterio es a minimizar y los posibles valores para él son los siguientes:

1. Nula
2. Baja
3. Media
4. Alta
5. Muy alta

g_8. Dictamen técnico del predio:
Calidad de la tierra donde se pretende sembrar el cultivo predeterminado. Un técnico agrónomo evalúa la tierra asigna un valor de aptitud para el tipo de cultivo deseado por el agricultor. La orientación de este criterio es con orientación a maximizar y se utilizó la escala ordinal siguiente:

1. Regular
2. Buena
3. Muy buena

Cada uno de los 105 clientes, fue evaluado con los criterios mostrados en la Tabla 5.1. Los resultados de dicha evaluación son presentados parcialmente en las Tablas 5.2 y 5.3, y de forma completa en el Anexo 1.

Tabla 5.2. Desempeño de las alternativas en cada criterio.

Alternativas	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
a1	9.50	Frijol	5	Prendaria	16	37	Media	Buena
a2	10.00	Frijol	10	Usufructuaria	13	14	Alta	Buena
a3	10.00	Frijol	7	Usufructuaria	7	40	Baja	Buena
a4	7.00	Frijol	1	Usufructuaria	7	43	Media	Buena
a5	11.00	Frijol	10	Usufructuaria	11	6	Media	Muy buena
:	:	:	:	:	:	:	:	:
a102	3.00	Maíz	10	Usufructuaria	22	51	Media	Regular
a103	3.00	Maíz	10	Usufructuaria	7	36	Baja	Muy buena
a104	3.00	Maíz	10	Prendaria	14	48	Baja	Buena
a105	13.00	Trigo	3	Prendaria	5	35	Alta	Buena

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5.3. Desempeño de las alternativas transformadas con las funciones y escalas definidas.

Alternativas	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
a1	0.48	1	0.714	3	16	1.000	3	2
a2	0.50	1	1.000	1	13	1.000	4	2
a3	0.50	1	1.000	1	7	1.000	2	2
a4	0.35	1	0.143	1	7	1.000	3	2
a5	0.55	1	1.000	1	11	0.857	3	3
:	:	:	:	:	:	:	:	:
a102	0.15	5	1.000	1	22	1.000	3	1
a103	0.15	5	1.000	1	7	1.000	2	3
a104	0.15	5	1.000	3	14	1.000	2	2
a105	0.65	2	0.429	3	5	1.000	4	2

Fuente: Elaboración propia.

La distribución de los valores por criterio es presentada en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4. Distribución de frecuencias relativas de los 105 productores por criterio.

Criterio	Valores o rangos de valores	Frecuencia (%)	Criterio	Valores o rangos de valores	Frecuencia (%)
Cantidad de Hectáreas	[02 - 06)	39.05%	Ubicación predio	[01 - 09)	31.43%
	[06 - 10)	33.33%		[09 - 17)	24.76%
	[10 - 14)	18.10%		[17 - 25)	20.00%
	[14 - 18)	3.81%		[25 - 33)	12.38%
	[18 - 22)	3.81%		[33 - 41)	5.71%
	[22 - 26)	0.95%		[41 - 49)	0.00%
	[26 - 30)	0.00%		[49 - 57)	0.95%
	[30 - 34)	0.95%		[57 - 65)	1.90%
				[65 - 73)	2.86%
Tipo de Cultivo	Maíz	44.76%			
	Garbanzo	5.71%	Tiempo de arraigo	[03 - 12)	20.95%
	Sorgo	0.00%		[12 - 21)	17.14%
	Trigo	0.95%		[21 - 30)	8.57%
	Frijol	48.57%		[30 - 39)	12.38%
				[39 - 48)	12.38%
Antigüedad de crédito	[01 - 02)	15.24%		[48 - 57)	10.48%
	[02 - 03)	4.76%		[57 - 66)	11.43%
	[03 - 04)	9.52%		[66 - 75)	4.76%
	[04 - 05)	4.76%		[75 - 84)	1.90%
	[05 - 06)	13.33%			
	[06 - 07)	2.86%	Morosidad del cliente	Muy alta	0%
	[07 - 08)	4.76%		Alta	24.76%
	[08 - 09)	8.57%		Media	49.52%
	[09 - 10)	0.00%		Baja	20.00%
	[10 - 11)	36.19%		Nula	5.71%
Tipo de Garantía	Prendaria	30.48%	Dictamen Técnico	Muy buena	25.71%
	Hipotecaria	25.71%		Buena	48.57%
	Usufructuaria	43.81%		Regular	25.71%

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la Tabla 5.4, la distribución de frecuencias de los 105 productores de Green Side en cada uno de los criterios, es diversa y en la mayoría de ellos, existen categorías o rangos con altos valores.

5.5. Procedimiento y metodología

El problema fue abordado en dos fases: la primera, consistió en la modelación de las preferencias del tomador de decisiones de Green Side con la metodología ELECTRE-III, la cual combina la lógica de los modelos de sobreclasificación, para construir una relación de sobreclasificación valuada que integra las preferencias del tomador de decisiones.

La segunda fase, correspondió a la explotación de la relación de sobreclasificación valuada utilizando el algoritmo evolutivo multiobjetivo propuesto, con el objetivo de presentar una recomendación al problema en cuestión.

Existen diversas razones por la cual fue seleccionado ELECTRE-III, para modelar las preferencias del decisor:

Primera, es de interés mostrar la funcionalidad en problemas del mundo real de la modelación de preferencias con ELECTRE-III y el MOEA-POSET, frente un conjunto de alternativas de tamaño mediano.

Segunda, ELECTRE es una metodología que permite la incorporación de criterios de carácter cualitativo, es decir, puede tomar en consideración la naturaleza subjetiva presente en diversos problemas del mundo real.

Tercera, a diferencia de otras técnicas, ELECTRE-III, puede trabajar con diferentes escalas de los criterios, es decir, no es necesario normalizar las escalas de cada uno de ellos.

Cuarta, ELECTRE-III está diseñado para incorporar la naturaleza imprecisa del tomador de decisiones, por medio de los umbrales de indiferencia y preferencia.

Quinta, otra característica relevante de ELECTRE-III, es que es un método no compensatorio, por lo que para una alternativa determinada, el bajo desempeño en uno o varios criterios no es compensado por el buen desempeño de otro, u otros criterios.

Sexta y última, ELECTRE-III admite la incomparabilidad entre alternativas, la cual ocurre cuando entre algunos pares de alternativas a y b, no hay evidencia suficientemente clara a favor de algún tipo de preferencia o indiferencia.

Siguiendo la metodología ELECTRE, se definieron y obtuvieron los valores de los parámetros inter-criterios, conocidos como umbrales y pesos. Los cuales a continuación se presentan:

5.5.1. Umbrales

ELECTRE introduce el concepto de umbral, como parte fundamental de su metodología. En este estudio, un directivo de primer nivel de la empresa Green Side actuó como el tomador de decisiones, el cual definió los valores de los umbrales de indiferencia, preferencia y veto presentados en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5. Umbrales de indiferencia (q), preferencia (p) y veto (v).

Etiqueta	Criterio	q	p	v
g_1	Cantidad de Hectáreas	5	10	0
g_2	Tipo de Cultivo	1	1	0
g_3	Antigüedad de Crédito en Años	1	2	0
g_4	Tipo de Garantía	1	1	0
g_5	Ubicación del Predio en Kilómetros	5	10	0
g_6	Tiempo de Arraigo en la Comunidad	1	2	0
g_7	Morosidad del Cliente	1	1	2
g_8	Dictamen Técnico del Predio	1	1	0

Fuente: Elaboración propia.

5.5.2. Pesos

Los pesos de los criterios en ELECTRE-III, a diferencia de otros métodos, pueden ser considerados "coeficientes de importancia" o "valores de importancia relativa" y no "tasas de sustitución" entre criterios, evitando con ello problemas de tipo compensatorio. En este estudio, el tomador de decisiones fue asistido para definir los pesos de cada uno de los criterios de acuerdo a la Teoría de Construcción Personal (PCT, por sus siglas en inglés), propuesta por Roger et al. (2000). La Tabla 5.6 muestra los pesos definidos para este estudio.

Tabla 5.6. Pesos de los criterios obtenidos a través de la teoría de construcción personal.

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	RtG	RtG+1	Peso Final
g_1	-	N	I	N	M	M	N	N	2	3	0.103
g_2	M	-	M	I	M	M	I	I	4	5	0.172
g_3	I	N	-	N	M	M	N	N	2	3	0.103
g_4	M	I	M	-	M	M	I	I	4	5	0.172
g_5	N	N	N	N	-	N	N	N	0	1	0.034
g_6	N	N	N	N	M	-	N	N	1	2	0.069

g_7	M	I	M	I	M	M	-	I	4	5	0.172
g_8	M	I	M	I	M	M	I	-	4	5	0.172
								Total	21	29	1.000

Fuente: Elaboración propia.

Notas:

1. $RtG \leftarrow RtG + 1$ para tomar en cuenta al criterio 5.
2. Para cada celda $ij, \{M, I, N\}$ significa que el criterio g_i es {mayor, igual, menor} importante que el criterio g_j.
3. El peso final de cada criterio g_i es obtenido al dividir $RtG_i + 1$ entre el total.

5.6. Modelo preferencial

Utilizando la matriz de desempeño de las alternativas y las preferencias del tomador de decisiones, modeladas a través de los umbrales de indiferencia, preferencia y veto (Tabla 5.5) y la importancia relativa de cada uno de los criterios (Tabla 5.6), se construyó una relación de sobreclasificación valuada, utilizando el método ELECTRE-III, implementado en el software SADGAGE (Leyva y Álvarez 2013). La relación de sobreclasificación valuada obtenida no es presentada aquí por falta de espacio, pues es una matriz de 105 filas y 105 columnas.

Hasta este punto, se concluye con la fase de modelación de preferencias del decisor. La siguiente fase, corresponde a la explotación del modelo de integración de preferencias, obtenido con SADGAGE. Para ello, se utilizó el Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo propuesto, configurado con los siguientes parámetros: El tamaño de la población fue fijado en 120, la probabilidad de cruzamiento en 90% y el número de generaciones en 10,000.

5.7. Resultados obtenidos

Después de ejecutar el algoritmo evolutivo, éste obtuvo diferentes soluciones no dominadas en el frente de Pareto, de ellas se eligió el ordenamiento que presentaba menor número de inconsistencias global en la suma de las funciones objetivo. En este caso, el ordenamiento seleccionado tuvo 730 inconsistencias al interior de las clases y 879 el número de desacuerdos preferencias entre alternativas en la relación de sobreclasificación crisp que están en desacuerdo en el sentido de la relación de sobreclasificación crisp óptima, con un nivel de corte en 0.66 (ver

apartado 3.4.1.1.2.2, para mayor detalle), ese nivel de desacuerdos corresponde un 7.97% del total de posibles inconsistencias. El orden de clases obtenido al final del procedimiento presentado en el capítulo 3, es mostrado en la Figura 5.2, mientras que clientes de Green Side y la clase a la que pertenecen son presentados en la Tabla 5.7.

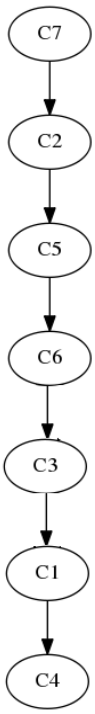


Figura 5.2. Orden de clases de obtenidos por el MOEA-POSET
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5.7. Resultados del MOEA-POSET ordenado por la posición de la clase en el ranking.

Alternativa	Clase	Posición de la clase en el ranking	Alternativa	Clase	Posición de la clase en el ranking	Alternativa	Clase	Posición de la clase en el ranking	Alternativa	Clase	Posición de la clase en el ranking
a68	7	1	a90	2	2	a19	1	6	a52	1	6
a100	7	1	a91	2	2	a20	1	6	a54	1	6
a101	7	1	a92	2	2	a21	1	6	a55	1	6
a6	2	2	a93	2	2	a22	1	6	a63	1	6
a16	2	2	a94	2	2	a23	1	6	a66	1	6
a30	2	2	a96	2	2	a24	1	6	a67	1	6
a31	2	2	a98	2	2	a25	1	6	a69	1	6
a39	2	2	a103	2	2	a26	1	6	a72	1	6
a41	2	2	a104	2	2	a27	1	6	a73	1	6
a58	2	2	a53	5	3	a28	1	6	a76	1	6
a59	2	2	a57	5	3	a29	1	6	a78	1	6

a60	2	2	a56	6	4	a32	1	6	a81	1	6
a61	2	2	a8	3	5	a33	1	6	a82	1	6
a62	2	2	a9	3	5	a34	1	6	a84	1	6
a64	2	2	a105	8	5	a35	1	6	a85	1	6
a65	2	2	a1	1	6	a36	1	6	a86	1	6
a70	2	2	a2	1	6	a37	1	6	a95	1	6
a71	2	2	a3	1	6	a38	1	6	a97	1	6
a74	2	2	a4	1	6	a40	1	6	a99	1	6
a75	2	2	a5	1	6	a43	1	6	a102	1	6
a77	2	2	a7	1	6	a44	1	6	a10	4	7
a79	2	2	a11	1	6	a45	1	6	a13	4	7
a80	2	2	a12	1	6	a46	1	6	a42	4	7
a83	2	2	a14	1	6	a47	1	6	a50	4	7
a87	2	2	a15	1	6	a48	1	6			
a88	2	2	a17	1	6	a49	1	6			
a89	2	2	a18	1	6	a51	1	6			

Fuente: Elaboración propia.

5.8. Conclusiones y recomendaciones del estudio

La conducción de este estudio de caso utilizando el método ELECTRE-III permitió modelar las preferencias del tomador de decisiones, donde dichas preferencias fueron expresadas en forma de relación de sobreclasificación valuada. El uso de técnicas evolutivas, como la que tiene implementado el MOEA-POSET, permitió generar un ordenamiento que puede ser utilizado para apoyar el otorgamiento de crédito a los productores agrícolas de Green Side. La elaboración de este estudio de caso permitió dejar evidencia que este algoritmo puede ser utilizado para este tipo de problemas.

Como se puede observar, en los resultados existen dos clases que aglomeran 33 y 59 solicitantes de crédito, esto es debido principalmente a la distribución de los valores por criterio presentada en la Tabla 5.4. La poca granularidad de los datos en los criterios con mayor peso (tipo de cultivo, tipo de garantía, morosidad del cliente y dictamen técnico del predio), contribuyeron también a ese resultado. Por supuesto, los pesos y umbrales definidos en los criterios también contribuyeron a ello.

Los solicitantes que se encuentran en la clase 7, son considerados con mejor perfil para otorgarles crédito (ver Anexo 1), sin embargo, existen ejemplos como el del solicitante 101,

ubicado en la clase 2, que tiene prácticamente el mismo perfil desempeño en los criterios que el solicitante 62 y pudiese estar el solicitante 101 en la clase 7, o viceversa. Sin embargo, esto es debido a que el MOEA-POSET trata de encontrar soluciones donde las alternativas provoquen menores inconsistencias.

Por otra parte, este estudio de caso, fue realizado con una serie de criterios que utiliza Green Side para la evaluación de los productores agrícolas que le solicitan crédito. Debido a que estos criterios no estaban concretamente definidos, se realizó un proceso de definición de los mismos en conjunto con los directivos de la empresa. Esta definición fue presentada en el apartado 5.4 que trata sobre los criterios de evaluación. Sin embargo, se recomienda a los directivos de Green Side realizar un cambio en el criterio *dictamen técnico* y además, agregar el criterio *score de crédito*. Lo anterior, con el objetivo de mejorar la evaluación integral de los productores agrícolas. Ambos criterios son presentados a continuación:

Dictamen técnico (maximizar)

Para este criterio, se sugiere que la evaluación técnica del predio donde se pretende sembrar, se realice utilizando un método que permita obtener un valor que denote la calidad del predio para el tipo un tipo de cultivo en específico. Este número, puede estar ser expresado en una escala numérica de 5 a 10 o entre 0 y 1, donde el valor máximo representa la mejor calidad.

La razón de esta recomendación es debido a que el técnico agrónomo que hace la visita de campo al predio y la evaluación del mismo, emite su diagnostico en el sentido de si este predio es *apto* o *no apto* para el cultivo, pero no manifiesta un juicio con grado de aptitud precisa.

Score de crédito (maximizar):

Se sugiere agregar el criterio *score de crédito* sobre el comportamiento crediticio de los solicitantes. Este score puede ser obtenido de la empresa privada denominada *Buró de Crédito*, la cual recibe información oportuna, confiable y segura de personas y empresas que han tenido o tienen algún tipo de crédito en México.

El score de crédito es uno de los elementos clave que utilizan los bancos para clasificar clientes, como parte del proceso de evaluación de crédito, esto con el objetivo de reducir el riesgo

actual y esperado de asignar un crédito a un cliente que no tiene el perfil crediticio adecuado (Abdou y Pointon, 2011).

Actualmente, Green Side utiliza el historial del *Buró de Crédito Regional* en el ámbito agrícola, pero no toma en consideración el perfil de crédito general del solicitante en otros ámbitos. La información que otorga este Buró es utilizada por Green Side, sólo como criterio de discriminación al inicio de la solicitud del crédito, pero no está integrado en el análisis del solicitante de manera integral junto a los demás criterios presentados en este estudio. Este criterio score de crédito, quedaría definido de la siguiente manera:

Es el valor obtenido del Buró de Crédito que tiene asociado el productor agrícola al momento de realizar su solicitud de crédito a Green Side. Este criterio puede tener un número entre 300 y 800, donde el valor más bajo está asociado a la etiqueta *No satisfactorio*, mientras que el más alto está asociado a *Excelente*. La Figura 5.3 muestra el score de crédito de un individuo cuyo valor es de 718 puntos y que se encuentra en el 15% de la población con mejor puntuación en México.

Figura 5.3. Score de crédito de una persona física obtenido del Buró de Crédito.
Fuente: Buró de Crédito (2014).

Capítulo 6. Resumen, conclusiones y recomendaciones de la investigación

En este capítulo, se presenta un resumen de la investigación y las conclusiones del trabajo sobre el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, utilizando un enfoque evolutivo multiobjetivo. De igual manera, se presenta la contribución en las ciencias administrativas, los obstáculos presentados durante la investigación, trabajo futuro y recomendaciones.

6.1. Resumen general de la investigación

El proceso de decisión, corresponde a las actividades cognitivas de un tomador de decisiones, ante una pregunta cuya respuesta no se da de manera automática. Existen diversos métodos, que los decisores pueden utilizar en el proceso de decisión, los cuales van desde la programación lineal, la programación dinámica, los modelos de transporte, hasta los modelos de teoría de colas. Sin embargo, existen problemas de decisión complejos que no logran ser resueltos sobre la base de enfoques unidimensionales. Por ello, un campo de la investigación de operaciones, que ha venido prosperando es el análisis multicriterio para la toma de decisiones, cuyo objetivo es apoyar a los tomadores de decisiones, para hacer frente a problemas donde está implícita la agregación de múltiples criterios, sobre todo, cuando existen objetivos contradictorios.

Dado un conjunto de alternativas y con base a las preferencias de un decisor, estas alternativas pueden ser ordenadas de la mejor a la peor, ser seleccionadas o ser clasificadas en grupos ordinales homogéneos definidos a priori.

Desde hace aproximadamente 10 años, diversos autores han realizado esfuerzos para formalizar e incluir en MCDA, el denominado problema de agrupamiento multicriterio ordenado. Sin embargo, éste puede ser abordado como un problema de ordenamiento multicriterio, donde las alternativas indiferentes entre sí, están agrupadas en clases y a partir de las relaciones de preferencia e incomparabilidad entre las alternativas, se forma un preorden parcial, o visto de otra manera, se obtiene un conjunto de clases parcialmente ordenadas.

En esta investigación, la teoría de decisión permitió tener un marco de estudio del problema de ordenamiento multicriterio, sobre todo, lo referente al método de sobreclasificación ELECTRE, el cual fue adoptado para modelar las preferencias del tomador de decisiones sobre un conjunto de criterios. De igual manera, permitió presentar diferentes métodos de ordenamiento y agrupamiento multicriterio, mismos que fueron referentes del presente trabajo de investigación.

El estudio de las características de las metodologías cualitativa y cuantitativa orientó a elegir predominantemente ésta última. De manera particular, se optó por el tipo de investigación *experimental***,** para tener control sobre la mayoría de las variables que concernieron al estudio. Lo anterior, permitió la ejecución del MOEA-POSET en diversos escenarios, manteniendo las mismas condiciones en cada uno de ellos. Para apoyar los resultados de dicho enfoque experimental, se diseñó un estudio de caso de tipo *instrumental*, el cual fue utilizado para tener una contrastación del desempeño del algoritmo propuesto. En este estudio se utilizaron conjuntos de datos reales de un conjunto de clientes de una empresa que otorga créditos a productores agrícolas. De igual manera, se realizó una prueba con el método de destilación, diseñado para obtener rankings de alternativas. Esto con el objetivo de conocer si este método era capaz de encontrar soluciones óptimas, a partir de rankings inducidos. Los resultados obtenidos por el MOEA-POSET son diversos, pero en general se concluye que puede lidiar con instancias del problema de ordenamiento multicriterio de hasta 150 alternativas.

6.2. Conclusiones

En el capítulo 1 de este documento de tesis se plantearon cuatro preguntas de investigación. Estas preguntas son consideradas auxiliares para responder la interrogante central y a partir de ellas generar las conclusiones. Con base a lo encontrado durante este trabajo, a continuación se presentan cada una de ellas con su respuesta:

1. ¿Cómo se puede formular el problema de ranking multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo?

Es indudable, que el análisis multicriterio para la toma de decisiones, ha tenido un crecimiento constante en el número de métodos y artículos publicados en los últimos 40 años. No obstante,

aun con la cantidad y diversidad de métodos publicados para abordar los problemas de selección, ordenamiento y clasificación en MCDA, existen ejemplos de dichos problemas que no pueden ser abordados con los métodos actuales; principalmente porque algunos de ellos, tienen problemas con las alternativas irrelevantes o por la cantidad de alternativas con las que pueden trabajar.

Por ello, el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, utilizando una relación de sobreclasificación valuada que representa las preferencias de un tomador de decisiones, debe ser formulado como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo, tal como se presentó en el presentado en el apartado 1.2, es decir:

$$
\begin{aligned}
& Max(\lambda(\tilde{p})), \quad Min(MinCut(\tilde{p})), \quad Min(n_V(\tilde{p})) \\
& Sujeto\ a: \\
& \tilde{p} \in \Omega \\
& \lambda \in [0,1], \quad \lambda \geq \lambda_0
\end{aligned}
$$

donde:

λ es la función objetivo de nivel de corte máximo

$MinCut$ es la función objetivo que cuenta el número de incomparabilidades al interior de las clases de alternativas.

n_V es la función objetivo de desacuerdos de preferencia entre pares mínimo.

Ω es el conjunto de relaciones de sobreclasificación crisp antisimétricas de clases de alternativas de A.

$\tilde{p}$ es una relación de sobreclasificación crisp antisimétrica de clases de alternativas de un conjunto de elementos A.

λ_0 es un nivel mínimo de nivel de credibilidad.

En cada instancia del problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, el MOEA-POSET desarrollado trata de resolver este problema de optimización multiobjetivo. Por los resultados obtenidos, se afirma que esta forma de formular este problema de ranking multicriterio como un problema de optimización combinatorio multiobjetivo es acertada, toda vez que el MOEA-POSET que lo implementa, es capaz de encontrar soluciones óptimas en conjuntos de hasta 150 alternativas.

2. ¿Cuáles son los elementos teóricos-metodológicos, que permiten crear un método para el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, basado en algoritmos evolutivos multiobjetivo, que incorpore enfoques flexibles de modelación de preferencias?

Para crear un método, que aborde el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos y que permita la incorporación de enfoques flexibles para modelar preferencias, se deben conjugar tres áreas principales:

a. Análisis Multicriterio para la Toma de Decisiones.
b. Métodos de Optimización Multiobjetivo.
c. Algoritmos Evolutivos.

En la primera de ellas, se deben considerar las teorías generales que envuelven a esta área de estudio, como lo es la teoría del comportamiento, de manera específica, la teoría de la decisión representada principalmente por Simon, James March y otros, la cual supone que el hombre administrativo es un ser racional, que toma las decisiones con información incompleta sobre las alternativas y las consecuencias, es decir, su racionalidad está limitada. Contraria al supuesto de que el tomador de decisiones es un ser tiene una serie de preferencias en común, que las alternativas y sus consecuencias son definidas por el medio ambiente y los tomadores de decisiones tienen un conocimiento perfecto de las alternativas y sus consecuencias.

En ámbito del análisis multicriterio para la toma de decisiones, el entendimiento de la modelación de preferencias del tomador de decisiones es un punto fundamental para crear un método para el problema en cuestión. Pues al momento de incorporar dichas preferencias en un algoritmo evolutivo multiobjetivo se debe hacer énfasis en las relaciones de preferencia entre alternativas y en las relaciones de preferencia entre clases de alternativas.

Por otro lado, en el área de Optimización Multiobjetivo, primeramente se deben incorporar los conceptos de optimización y dominancia[27]. Tomar en cuenta que, en los problemas multiobjetivos generalmente existe un conjunto de soluciones no dominadas entre sí, es decir, raramente existe una solución cuyo desempeño en todos objetivos sea mejor que las otras soluciones. Es imperativo considerar también el carácter exponencial del problema de ordenamiento multicriterio al momento de definir los objetivos y la forma de penalizar las alternativas que no están ubicadas correctamente de acuerdo a las preferencias del tomador de decisiones.

Del área de algoritmos evolutivos, se deben definir representaciones de individuos que permitan realizar búsquedas de soluciones en los espacios objetivos de los problemas multiobjetivos y que además faciliten la concepción de los operadores de cruzamiento y mutación. De igual manera, se deben incluir métodos eficientes para la evaluación de los individuos de la población y mecanismos adecuados de reemplazo de los mismos en cada una de las generaciones. Esto es importante porque al tratarse de un problema combinatorio, el número de soluciones crece de manea exponencial con el aumento del número de alternativas y el número de clases. Por ello, el énfasis de que la representación del individuo de la población debe ser diseñada de tal manera que los operadores de cruzamiento y mutación puedan sin mucho esfuerzo, encontrar soluciones que conduzcan a la región del frente de Pareto verdadero, específicamente, a la región de interés del tomador de decisiones.

Al considerar estos elementos teóricos-metodológicos, es posible crear métodos para resolver instancias del problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, basado en algoritmos evolutivos multiobjetivo e incorporando enfoques flexibles de modelación de preferencias.

3. ¿Cómo es posible diseñar y desarrollar un método, para resolver el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, que sea flexible y sensible al momento de integrar las preferencias del tomador de decisiones?

[27] Dos soluciones son no dominadas entre sí en al menos el valor de un objetivo una solución es mejor que la otra. Por otro lado, una solución domina a otra, si en todos los objetivos la primera es mejor que la segunda.

Cuando se diseña y desarrolla un método para el problema de ordenamiento multicriterio de tamaño mediano, donde existen conjuntos o clases de alternativas indiferentes entre sí, de primera instancia el número de clases no debe ser un parámetro de entrada, sino que debe ser determinado por el método de manera natural de acuerdo a la información del problema.

Dicho método de ordenamiento multicriterio, al integrar las preferencias de un tomador de decisiones para generar las clases de alternativas, debe hacer uso de las relaciones de preferencia entre alternativas, con las cuales el método podrá hacer comparaciones entre ellas y determinar si una alternativa en particular, debería estar o no en una determinada clase junto a otra alternativa. Para ello, se deben definir reglas que reflejen la consistencia entre el modelo de integración de preferencias del tomador de decisiones y el conjunto de clases.

Además, al momento de diseñar y desarrollar un método de esta naturaleza, debe tomarse en cuenta la forma de suministrar las preferencias del tomador de decisiones. La flexibilidad y sensibilidad del método debe ser en el sentido de poder suministrar parámetros de entrada, que permitan construir ordenamientos multicriterio para diferentes números de alternativas de decisión y con diferentes niveles de credibilidad sobre una relación de sobreclasificación valuada en particular.

El diseño y desarrollo del método son tareas recurrentes en el ciclo de vida de un enfoque de desarrollo de software incremental, como el espiral. Un método para resolver el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, flexible y sensible al momento de integrar las preferencias del tomador de decisiones, debería ser diseñado y desarrollado bajo ese enfoque incremental. A través de ese enfoque, se puede garantizar que el método es estable y confiable. En dicho enfoque, las pruebas internas y ajustes del mismo son periódicas. En este caso, dichas pruebas deben realizarse utilizando primeramente, instancias donde los resultados son conocidos y posteriormente diseñar escenarios diferentes para conocer el desempeño del método en cuestión.

4. ¿Cómo será el desempeño de un método basado en algoritmos evolutivos multiobjetivos para resolver problemas de ranking multicriterio de conjuntos de alternativas de tamaño mediano, que incorpore enfoques flexibles de modelación de preferencias con menos inconsistencias respecto a otros métodos similares?

Hasta el momento, se desconoce el número máximo de alternativas con las que el método propuesto puede trabajar. Sin embargo, como se mencionó en el capítulo de metodología y resultados, se realizaron pruebas con hasta 150 alternativas y el algoritmo encontró soluciones sin inconsistencias. Por tanto, los resultados obtenidos, permiten afirmar que las soluciones presentadas por el Algoritmo Evolutivo para resolver el problema en cuestión, tiene una efectividad cercana al 100% cuando el numero de clases es pequeño (3 clases), pues independientemente del valor de L y del número de alternativas, el MOEA-POSET encontró 2,984 soluciones sin inconsistencias de 3,000 posibles, representado esto un 99.47% de efectividad. Respecto al número de alternativas, independientemente del valor de L y del número de clases, el algoritmo evolutivo multiobjetivo encontró 1772 soluciones óptimas de 2,500 posibles, siendo esto 71.68% de efectividad.

Por otra parte, la prueba realizada al método de destilación con una muestra de las relaciones de clasificación valuadas utilizadas en la prueba del MOEA-POSET, permite afirmar que este último tuvo mejor desempeño que dicho método de destilación. Pues éste último sólo encontró 4 soluciones optimas de las 210 posibles. Esto evidencia que, además de los problemas que tiene este método con las alternativas irrelevantes y con los ciclos en las relaciones, presenta problemas con la cantidad de alternativas con las que puede trabajar. Lo cual no sucede con el MOEA-POSET con hasta 150 alternativas, siempre y cuando en esta versión del MOEA-POSET, se ajuste el número de generaciones al menos 10,000. Sin embargo, ante la presencia de pocas alternativas y un número similar de clases, tanto el MOEA-POSET como el método de destilación presentan problemas para obtener las soluciones óptimas.

Por otro lado, con el tamaño explorado de 105 alternativas en el estudio sobre el problema de ordenamiento de clientes de la empresa Green Side, el algoritmo tuvo un desempeño 91.94% de consistencia, esto basado en el número de desacuerdos de preferencias entre alternativas de la

relación de sobreclasificación crisp, que están en desacuerdo en el sentido de la relación de sobreclasificación crisp óptima, para un nivel de corte en 0.66 que fue el valor obtenido por el MOEA-POSET. Este estudio de caso, permitió validar la pertinencia del método propuesto en el ámbito de las ciencias administrativas y abrió una ventana de oportunidad para tratar este tipo de problemas en la misma empresa y otros organismos e instituciones. El uso del enfoque constructivo del apoyo para la toma de decisiones multicriterio permitió validar la teoría del mismo, sobre que en la construcción de la solución del problema, es importante la relación entre el analista y el tomador de decisiones. Que la solución se construye entre ambos y que el dominio del problema lo tiene el tomador de decisiones y que la metodología está del lado del analista. También, que la extracción de las preferencias del tomador de decisiones mediante el uso de técnicas apropiadas como la teoría de construcción personal o la de Simos revisado, permite tener mayor objetividad y por tanto, es factible que el tomador de decisiones acepte la recomendación propuesta porque participó en su construcción.

El supuesto para el cual los resultados del método propuesto son validos, es que las preferencias del tomador de decisiones son modeladas sin ambigüedades y por tanto, la relación de sobreclasificación valuada que se utiliza como entrada de datos del algoritmo, representa adecuadamente las preferencias del tomador de decisiones. La existencia de ciclos de transitividad entre alternativas, no debería estar presente, de lo contrario significaría que las preferencias del decisor no fueron modeladas apropiadamente o que están presentes por la naturaleza de los datos, y éstos son ineludibles.

Con la revisión de la literatura y la validación empírica del algoritmo evolutivo utilizando datos artificiales, permitió conocer su desempeño frente a una amplia variedad de estructuras de clases. La segunda prueba por su parte, permitió comparar el desempeño del método de destilación frente a una muestra de relaciones de sobreclasificación valuadas utilizadas para evaluar al MOEA-POSET y conocer si este último tenia mejor desempeño que el método de destilación. Con el estudio de caso por su parte, se obtuvo una validación de pertinencia en el mundo real y en el área de las ciencias administrativas. Por lo tanto, se concluye que abordar el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, como un problema de optimización multiobjetivo aplicando algoritmos evolutivos multiobjetivos para

su solución, permite presentar al tomador de decisiones, recomendaciones consistentes a sus preferencias y menores que las que presentan métodos de ordenamiento multicriterio clásicas.

6.3. Contribución a las ciencias administrativas

La contribución principal de esta investigación, sobre el problema de ordenamiento multicriterio de conjunto de alternativas de tamaño mediano, es la propuesta del enfoque evolutivo multiobjetivo para su solución. Este método puede ser utilizado al interior de las empresas e instituciones de manera similar como fue presentado en el estudio de caso del capítulo anterior. Primeramente será necesario modelar las preferencias de un tomador de decisiones en forma de una relación de sobreclasificación valuada, para posteriormente suministrarla al MOEA-POSET, para que éste obtenga el ordenamiento.

La característica distintiva de este enfoque, es el hecho de tomar en cuenta la naturaleza multiobjetivo del método de ordenamiento multicriterio. Esto ayuda al tomador de decisiones, a identificar una partición de un conjunto de alternativas en clases y al mismo tiempo, las relaciones de preferencia entre dichas clases. En ese sentido, el enfoque propuesto, difiere de enfoques clásicos de ordenamiento multicriterio como el método de destilación y regla de flujo neto de ELECTRE-III y PROMETHEE II respectivamente.

Con las pruebas de validación realizadas, sobre conjuntos de datos reales en el estudio de caso, se observa que el ordenamiento de las alternativas es robusto y significativo. Desde el punto de vista de la investigación, la elección de un conjunto reducido de ordenamientos parciales de clases de alternativas, ofrece información adicional al tomador de decisiones, la cual puede ayudarle a tener una mejor comprensión de la estructura multicriterio del conjunto de datos.

6.4. Obstáculos

En cada una de las etapas de la investigación, se presentaron obstáculos que fueron resueltos para poder avanzar en la misma y llegar hasta a las conclusiones plasmadas en este capítulo. A continuación se presentan las más significativas:

El obstáculo principal de esta investigación, fue el diseño y desarrollo del Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo, sobre todo al tiempo necesario fue de aproximadamente un año y medio. En cada una de las etapas del desarrollo del mismo, diversas pruebas y ajustes fueron realizados.

Otro obstáculo, tuvo que ver con la generación de los datos artificiales, pues se requirió desarrollar dos algoritmos generadores de ejemplos de ordenamientos de alternativas. De igual manera, fue un obstáculo, transformación de los datos de entrada para la prueba con el método destilación, pues para ello se realizaron dos programas con Microsoft Visual Basic for Applications en Excel.

Por último, la identificación del problema, la definición de los criterios de evaluación, los pesos y umbrales de indiferencia, preferencia y veto del estudio de caso, se prolongó prácticamente 5 meses, por problemas de agenda entre tomador de decisiones y del analista y, por tener que viajar a la ciudad de Los Mochis para las entrevistas de trabajo sobre la modelación de las preferencias y validación de los resultados con el directivo de Green Side

6.5. Trabajo futuro y recomendaciones

Afirmar que con esta investigación, se ha finiquitado el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano, sería una aberración. Ya que de primera instancia, es necesario explorar el límite superior del enfoque propuesto, respecto al tamaño máximo del conjunto de alternativas con las que puede tratar. Es decir, cuál es la capacidad final del enfoque para resolver problemas de ordenamiento multicriterio, cuyas soluciones tengan un desempeño aceptable desde el punto de vista de las preferencias del tomador de decisiones.

Una vez conocido lo anterior, se inicia un nuevo horizonte de investigación, para abordar problemas de ordenamiento de conjuntos de alternativas de tamaño superior al tratado con el algoritmo evolutivo multiobjetivo propuesto. Para ello, es necesario modificar la representación de los individuos de la población, así como los operadores de cruzamiento y mutación. Inicialmente, podrían utilizarse las mismas funciones objetivo para probar el desempeño de la

nueva propuesta y evaluar si las soluciones obtenidas, son consistentes a las preferencias del tomador de decisiones.

También, es necesario avanzar en el desarrollo de técnicas evolutivas de tercera generación, tal como los Algoritmos Evolutivos Diferenciales (Differential Evolution Algorithms), que desde su concepción en 1995, han sido utilizados en problemas de optimización sobre espacios continuos, teniendo buen desempeño. La ventaja de utilizar esta variante de Algoritmos Evolutivos, es que éstos operan con los mismos elementos y pasos de los Algoritmos Evolutivos clásicos, tal como la población, los operadores de selección, cruzamiento y mutación, entre otros, con la discrepancia principal, del uso de la diferencia de vectores de parámetros, para explorar el espacio de las funciones objetivo.

La incorporación de la relación de preferencia débil en el ranking es una tarea que queda pendiente por realizar. De igual manera, analizar y en su defecto implementar, diferentes niveles de penalización para las inconsistencias entre el ordenamiento y las preferencias del tomador de decisiones. Es decir, no penalizar igual cuando exista una relación de incomparabilidad entre dos alternativas ubicadas en una misma clase, que cuando exista una relación de preferencia estricta entre ellas.

Como línea de investigación secundaria, es necesario el estudio, aplicación y en su defecto el desarrollo de métricas para evaluar el desempeño de los métodos desarrollados. Estas se requieren para conocer que tan cercanas son las recomendaciones obtenidas respecto a las preferencias del decisor, tomando como base que no existe un Frente de Pareto Verdadero con el cual medir dichas recomendaciones.

Por último, hay un nicho de oportunidad en el desarrollo de métodos computacionales que permitan apoyar la definición de los pesos y umbrales en la modelación de las preferencias del tomador de decisiones.

Referencias

Abdou, H. & Pointon, J. (2011). Credit scoring, statistical techniques and evaluation criteria: a review of the literature. En *Intelligent Systems in Accounting, Finance & Management*. Vol. 18, No. 2-3, 59-88.

Allais, M. (1979). The so-called Allais paradox and rational decisions under uncertainty. En Hagen, O. y Allais, M. (Eds.). *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox* (pp. 437–681). Dordrecht, Holanda. Reidel.

Araujo, Lourdes y Cervigón, Carlos. (2009). *Algoritmos Evolutivos. Un enfoque Práctico*. México: Alfaomega.

Badinger, H. y Reuter W. (2014). Measurement of fiscal rules: Introducing the application of partially ordered set (POSET) theory. En *Journal of Macroeconomics*. Vol. 43, pp. 108-123.

Baroudi R. y Safia N. (2010). *Towards multicriteria analysis: A new clustering approach.* 2010 International Conference on Machine and Web Intelligence (ICMWI). Argel, 3-5 Oct. 2010. Argelia. (pp. 126 - 131).

Behzadian M., Kazemzadeh R.B., Albadvi A. y Aghdasi M. (2010). PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications. *European Journal of Operational Research*. Vol. 200. pp. 198-215.

Belton, V., y Stewart, T. (2002). *Multiple criteria decision analysis: an integrated approach*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic.

Benson, H. (2009). Multi-objective Optimization. Pareto Optimal Solutions, Properties. En Floudas, Ch., y Pardalos P. (Eds.). *Encyclophedia of Optimization. 2nd ed*. (pp. 2478-2481). New York, USA. Springer Science + Business Media, LLC.

Bermúdez, J. (2009). *Decision Theory and Rationality*. USA: Oxford a University Press.

Bossert, W. y Suzumura, K. (2010). *Consistency, Choice, and Rationality*. London, England: Harvard University Press.

Bouyssou, D., Marchant, T., Pirlot, M., Perny, P., Tsoukias, A. y Vincke, P. (2000). *Evaluation and Decision Models: A Critical Perspective*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Bouyssou, D. (1990). Building criteria: A prerequisite for MCDA. En Bana C.A. e Costa (Eds.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*. (pp. 58-80). Berlin, Alemania. Springer-Verlag.

Bouyssou D., Marchant Th., Pirlot M., Tsoukiàs a., y Vincke, Ph. (2006). *Evaluation and decision models with multiple criteria: Stepping stones for the analyst*. Springer Verlag, Boston.

Brans J.P. y Vincke, Ph. (1985). A preference ranking organization method: (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making). En *Management Science*. Vol. 31, No. 6, 647-656.

Brans, J.P.; Vincke, Ph. y Mareschal, B. (1986): How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. En *European Journal of Operational Research*. Vol 24, 228-238.

Brugha, C. (2004). Structure of Multi-Criteria Decision-Making. En *The Journal of the Operational Research Society.* Vol. 55, No.11, 1156 – 1168.

Brinkmann, G. y McKay, B. (2002). Posets on up to 16 points. En *Order*. Vol 19, No. 2.

Bufardi, A., Gheorghe, R. y Xirouchakis P. (2008). Fuzzy Outranking Method: Recent Developments. En Cengiz Kahraman Ed. *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making: Theory and Applications with Recent Developments*. USA: Springer Science + Business Media, LLC.

Buro de Crédito. (2014). Mi Score. México. http://www.burodecredito.com.mx/score-info.html. (Recuperado en 14/09/2014).

Cailloux, O., Lamboray, C., Nemery de Bellevaux, Ph. (2007). *A taxonomy of clustering procedures*. Ponencia titulada en Proceedings of the 66th Meeting of the European Working Group on MCDA, Marrakech, Jul. 2007. Marruecos.

Charnes, A. y Cooper, W.W.(1961). *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. New York, USA. John Wiley & Sons.

Checkland, P. (1981). *Systems thinking, systems practice. New York*, USA. Wiley.

Claude S. George (2005). *Historia del pensamiento administrativo*. 2da. Edición. México: Prentice Hall - Hispanoamericana.

Coello C., Lamont, Gary y Van D. (2002). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems. Genetic and Evolutionary Computation*. USA: Springer.

Coello, Carlos. y Lamont, Gary. (2004). *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*. USA: World Scientific.

Coello Coello, Carlos A., Van Veldhuizen, David A. y Lamont, Gary B. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. 3ra ed. USA: Springer Verlag.

CONDUCEF. (2014). Contrato de Apertura de Crédito con Garantía Hipotecaria. México. http://www.condusef.gob.mx/index.php/instituciones-financieras/bancos/credito-hipotecario/523-contrato-hipotecario. (Recuperado en 14/09/2014).

Cook, William, Cunningham William, Pulleyblank William y Schrijver Alexander. (1998). *Combinatorial Optimization*. USA: John Wiley & Sons. ISBN: 978-0471558941

Cormode, G. y McGregor A. (2008). Approximation algorithms for clustering uncertain data. In Proceedings of the twenty-seventh ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART symposium on Principles of database systems (PODS '08). ACM, New York, NY, USA, 191-200.

De Smet, Y. y Eppe, S. (2009). Multicriteria Relational Clustering: The Case of Binary Outranking Matrices. M. Ehrgott, C.M. Fonseca, X. Gandibleux, J-K. Hao, M. Sevaux, eds. *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg: 380-392.

De Smet, Y., Nemery de Bellevaux, Ph. y Selvaraj, R. (2012). An exact algorithm for the multicriteria ordered clustering problem. En *Omega*. Vol. 40, No. 6, 861–869.

De Smet, Y. y Montano, L. (2004). Towards multicriteria clustering : an extension of the k-means algorithm. En *European Journal of Operational Research*. Vol. 158, No. 2, 390-398.

Deb, K. (2001). Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms. England: John Wiley & Sons, Ltd.

Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. En *IEEE Transactions on Evolutionary Computation.* Vol. 6, No. 2, 182-197.

Doumpos, M. y Zopounidis, C. (2004). *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*. En Pardalos, P. and Hearn, D. (Eds.). USA. Kluwer Academic Publishiers.

Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. 2nd ed. Berlin, Alemania: Springer

Ferligoj, A. (1997). *Recent developments in cluster analysis*. Faculty of Social Sciences, University of Ljubljana. Eslovenia.

Ferligoj, A. y Batagelj, V. (1992). Direct multicriterion clustering. En *Journal of Classification*. Vol. 9, No. 1, 43-61.

Fernández, E., Leyva, J., 2004. A method based on multiobjective optimization for deriving a ranking from a fuzzy preference relation. En *European Journal of Operational Research* 154, 110–124.

Fernández E., Navarro J. y Bernal S. (2010). Handling multicriteria preferences in cluster analysis. En *European Journal of Operational Research*. Vol. 202, 819–827.

Figueira J., Greco, S., Roy, B. y Slowinski, R. (2010). ELECTRE Methods: Main Features and Recent Developments. En Constantin Zopounidis y Pardalos Panos (Eds.). *Handbook in Multicriteria Analysis*. Berlin, Alemania. Springer-Verlang.

Figueira J., Mousseau V. Roy B. (2005). Electre methods. In *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, eds., USA: Springer, pp. 139–149.

Figueira J., Greco, S., Roy, B. y Slowinski, R. (2010). ELECTRE Methods: Main Features and Recent Developments. En Constantin Zopounidis y Pardalos Panos (Eds.). *Handbook in Multicriteria Analysis*. Berlin, Alemania. Springer-Verlag.

Financiera Rural. (2014). Lineamientos de Operación Específicos para la Administración de Riesgos de Precios Agrícolas "FONARPA AGRÍCOLA. México. http://www.financierarural.gob.mx/ApoyosProductoresIntermediarios/Programas/Documents/Lineamientos%20FONARPA%20AGRICOLA%203-08-09.pdf. (Recuperado en 14/09/2014).

Fishburn, P. (1970). *Utility theory for decision making*. New York, USA: Wiley.

Fishburn, P. (1982). Nontransitive measurable utility. En *Journal of Mathematical Psychology*. Vol. 26, 31–67.

Fodor, J. y Roubens, M. (1994). Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fogel, L. J., Owens, A.J., and Walsh, M.J. (1966). *Artificial intelligence through simulated evolution*. New York, USA: John Wiley.

Fonseca, C.M. y Fleming, P.J. (1993). Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization. En *Genetic Algorithms: Proceedings of the Fifth International Conference*, 416-423. Morgan Kaufmann.

Fontes, D. y Gaspar-Cunha, A. (2010). On Multi-Objetive Evolutionary Algorithms. En Zopounidis, Constantin y Pardalos, Panos M. (Eds.). *Handbook of Multicriteria Analysis*. (pp. 287-310). Berlin, Alemania. Springer-Verlag.

Genard, J.-L. y Pirlot,M. (2002).Multiple criteria decision aid in a philosophical perspective. En Boyssou, D., Jacquet-Lagrèze, E., Perny, P., Slowinski, R., Vanderpooten, D. y Vincke, Ph. (Eds.), *Aiding decisions with multiple criteria: essays in honour of Bernard Roy*. (pp. 89–117). Dordrecht, Holanda. Kluwer Academic.

Ghanea-Hercock, R. (2003). *Applied evolutionary algorithms in Java*. New York, USA: Springer-Verlag.

Glover F (1977) Heuristics for integer programming using surrogate constraints. En *Decis Sci*. Vol. 8, 156–166.

Goodwin, P. y Wright, G. (2009). *Decision Analysis for Management Judgment. 4th Edition*. USA: John Wiley & Sons.

Handl J. y Knowles, J. (2005). Multiobjective clustering around medoids. En *The 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vol. 1, 632-639.

Handl J. y Knowles, J. (2005). Improvements to the scalability of multiobjective clustering. *The 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2005*. Vol.3,.2372,2379.

Handl J. y Knowles, J. (2007). An Evolutionary Approach to Multiobjective Clustering, En *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. Vol. 11, No. 1, 56-76.

Hartigan, J. (1972). Direct Clustering of a Data Matrix. En *Journal of the American Statistical Association*. 67 (337): 123-129.

Holland, J.H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor, Michigan, USA: University of Michigan Press.

Horn, J. Nafploitis, N, and Goldberg, D.E. (1994). A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. En *Proceeding of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation*. Michalewicz, Z. (ed.), (pp. 82-87). Piscataway, New Jersey, USA. IEEE Service Center.

Humphreys, P., Svenson, O., y Vári, A. (1983). *Analysis and aiding decision processes*. Amsterdam, Holanda: North-Holland.

IIJ-UNAM. (2014). Legislación Federal. Código Civil Federal. Libro Cuarto de las Obligaciones. Parte Segunda de las Diversas Especies de Contratos. Título Decimocuarto de la Prenda. México. http://info4.juridicas.unam.mx/ijure/fed/1/2885.htm?s=. (Recuperado en 14/09/2014).

Jacquet-Lagrèze E. y Siskos, Y.(1982). Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making: the UTA method. En European Journal of Operational Research. Vol. 10, 151-164.

Kahneman, Daniel. (2011). *Thinking, Fast and Slow*. New York, USA: Farrar, Straus and Giroux.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1981). *Judgement under uncertainty—heuristics and biases*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: an analysis of decision under risk. En *Econometrica*. Vol. 47, 263–291.

Keeney, R. L. (1992). *Value-focused thinking. A path to creative decision making*. Cambridge: Harvard University Press.

Klir, G.J., Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*., Englewood Cliffs, NJ., USA: Prentice-Hall.

Koopmans, T.C. (1951). *Activity Analysis of Production and Allocation*.New York, USA: John Wiley & Sons.

Koza, J.R. (1992). *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. USA: MIT Press.

Larichev, O. I., & Moshkovich, H. M. (1995). Unstructured problems and development of prescriptive decision making methods. En Pardalos, P., Siskos, Y. y Zopounidis, H.

(Eds.), *Advances in multicriteria analysis.* (pp. 47–80). Dordrecht, Holanda. Kluwer Academic.

Lewis R. (2008). A Survey of Metaheuristic-based Techniques for University Timetabling Problems. En *Or Spektrum*. Vol. 30, No. 1, 167-190.

Leyva J. y Aguilera, M. (2005). A Multiobjective Evolutionary Algorithm for Deriving Final Ranking from a Fuzzy Outranking Relation. En Coello Coello, C.A.; Zitzler, E. y Hernández Aguirre, A. (Eds.). *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Third International Conference, EMO 2005, (pp. 235-249), Springer, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3410, Guanajuato, México.

Leyva J. y Álvarez, P. (2013). SADGAGE: A MCGDSS to Solve the Multicriteria Ranking Problem in a Distributed and Asynchronous Environment. En Juan Carlos Leyva López; Rafael Espin Andrade; Rafael Bello Pérez y Pavel Anselmo Álvarez Carrillo (Eds.). *Studies on Knowledge Discovery, Knowledge Management and Decision Making*. Fouth International Whorkshop Proceedings, Eureka-2013 (pp. 247-254), Atlantis Press, Mazatlán, México.

Leyva, J. y Araoz, M. (2013). *A multi-objective extension of the net flow rule for exploiting a valued outranking relation*. En Int. J. Multicriteria Decision Making. Vol. 3, 36–54,

Leyva J. y Fernández, E. (1999). *A genetic algorithm for deriving final ranking from a fuzzy outranking relation*. En Foundations of Computing and Decision Sciences. Vol. 24, No. 1, 33-47.

Leyva J., Solano, J., Gastélum, D. y Sánchez, D. (2013a). A Multiobjective Evolutionary Approach to a Medium- Sized Multicriteria Ranking Problem. En Juan Carlos Leyva López; Rafael Espin Andrade; Rafael Bello Pérez y Pavel Anselmo Álvarez Carrillo (Eds.). Studies on Knowledge Discovery, Knowledge Management and Decision

Making. Fouth International Whorkshop Proceedings, Eureka-2013 (pp. 188-197), Atlantis Press, Mazatlán, México.

Leyva, J., Gastélum, D. y Urias, M. (2013b). *An Application of a Multicriteria Approach to Compare Economic Sectors: The Case of Sinaloa, Mexico*. En Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2013) (pp 710-725). Sheffield, UK. Springer.

Luce, R. D., & Raiffa, H. (1957). *Games and decisions*. New York, USA: Wiley.

March, James (1994). *A Primer on Decision Making. How Decision Happen*. USA: The Free Press.

Mareschal, B., De Smet, Y., Nemery, P.(2008). Rank reversal in the PROMETHEE II method: some new results. *En Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*. Singapore, pp. 959–963. ISBN: 978-1-4244-2629-4

Meyer, P. y Bigaret, S. (2012). diviz: a software for modeling, processing and sharing algorithmic workflows in MCDA. En *Intelligent Decision Technologies*. Vol. 6, No.4, 283-296.

Meyer, P. y Olteanu, A-L. (2013). Formalizing and solving the problem of clustering in MCDA. En *European Journal of Operational Research*.
DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.016

Montgomery, H. (1983). Decision rules and the search for a dominance structure: towards a process models of decision making. En P. C. Humphreys, O. Svenson y A. Vári (Eds.). *Analysing and aiding decision processes*. (pp. 343–369). Amsterdam, Holanda. North-Holland.

Montgomery, H., y Svenson, O. (1976). On decision rules and information processing strategies for choices among multiattribute alternatives. En *Skandinavian Journal of Psychology*. Vol. 17, 283–291.

Moscato, P.(1989*). On genetic crossover operators for relative order preservation*. C3P Report 778, California Institute of Technology, Pasadena,CA 91125.

Murray R. Spiegel y Larry J. Stephens. (2009). *Estadística*. 4ta Ed. México. Mc Graw-Hill. México.

Nemery de Bellevaux, Phillipe. (2006). *Multicriteria Clustering*. MSc. Thesis, Universite Libre de Bruxelles. Bruselas, Bélgica.

Oxford (2010). *Oxford Dictionary of English*. UK. Oxford University Press.

Pardalos, Panos, Siskos, Yannis y Zopounidis, Constantin (Eds.). (1995). *Advances in Multicriteria Analysis*. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Park, Y. y Song M. (1998). A genetic algorithm for clustering problems. In Proc. the 3rd Conf. Genetic Programming: 568-575.

Patil, G.P. y Taillie C. (2004). Multiple indicators, partially ordered sets and linear extensions: Multi-criterion ranking and prioritization. En *Journal of Environmental and Ecological Statistics*. Vol. 11, 199-228.

Poulton, E. C. (1994). *Behavioral decision theory: a new approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prim, R. C. (1957). Shortest connection networks and some generalizations. En *Bell System Technical Journal*, Vol. 36, 1389–1401.

Rasekhi, S. y Rostamzadeh, M. (2011). Fundamental Modeling Exchange Rate using Genetic Algorithm: A Case Study of European Countries. *En Journal of Economics and Behavioral Studies.* Vol. 3, No. 6, 352-359.

Rocha, C. y Dias, L. (2013). MPOC: an agglomerative algorithm for multicriteria partially ordered clustering. En *4OR*. Doi: 10.1007/s10288-013-0228-1.

Rocha, C., Dias, L. y Dimas, I. (2012). Multicriteria Classification with Unknown Categories: A Clustering–Sorting Approach and an Application to Conflict Management. En *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis.* Vol. 20, No. 1-2, 13–27.

Rogers, Martin, Michael Bruen y Lucien-Yves Maystre. 2000. *ELECTRE and Decision Support - Methods and Applications in Engineering and Infrastructure*. Boston, MA: Kluwer, Academic Publishers.

Roy, B. (1968). Classement Et Choux en Présence de Points de Vue Multiples (La Méthode ELECTRE). En *Revue Francaise d' Informatque et de Recherche Operationnelle*. Vol. 8, 57-75.

Roy, B. (1985). Méthodologie Multicritère D'aide à la Décision. En *Economica*. Paris.

Roy, B. (1990). Decision-aid and decision-making. En *European Journal of Operational Research*. Vol 45, 324-331.

Roy, B. (1991). The outranking approach and the foundation of electre methods. En *Theory and Decision*. Vol. 31, 49–73.

Roy, B. (1993). Decision science or decision-aid science? En *European Journal of Operational Research.* Vol. 66, 184–203.

Roy, B. (1996). *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Roy, B. (2010). Two Conceptions of Decision Aiding. En *International Journal of Multicriteria Decision Making*. Vol. 1, No.1.

Savage, L. J. (1954). *The foundations of statistics*. New York: Wiley. Second revised edition, 1972.

Schaffer, G. (1988). Savage revisited. En Bell, D., Raiffa, H. y Tversky, A. (Eds.), *Decision making: descriptive, normative and prescriptive interactions.* (pp. 193–235). Cambridge. Cambridge University Press.

Sloane (2014a). Bell or exponential numbers: number of ways to partition a set of n labeled elements. *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*. Publicado electrónicamente en https://oeis.org/search?q=a000110&sort=&language=&go=Search.

Sloane (2014b). Fubini numbers: number of preferential arrangements of n labeled elements; or number of weak orders on n labeled elements. *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*. Publicado electrónicamente en https://oeis.org/search?q=a000670&sort=&language.

Sloane (2014c). Number of partially ordered sets ("posets") with n labeled elements (or labeled acyclic transitive digraphs). *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*. Publicado electrónicamente en https://oeis.org/search?q=a001035&sort=&language=&go=Search.

Simon, Herbert. (1959). Theories of Decision-Making in Economics and Behavioral Science. En The American Economic Review. Vol. 49, No. 3, 253-283.

Simon, Herbert. (1947). Administrative behaviour: a study of decision making processes in administrative organizations. New York: Mac Millan.

Simon, Herbert. (1977). The New Science of Management Decision. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. 3rd revised edition; first edition 1960.

Sipser, Michael. (2006). *Introduction to the Theory of Computation*. USA: Thomsom Course Technology.

SRA. (2014). Glosario de términos jurídico-agrarios. México. http://www.sra.gob.mx/sraweb/datastore/home_store/index/enciclopedia/Terminos_Agrarios.pdf. (Recuperado en 14/09/2014).

Srinivas, N y Deb, K. (1995). Multiobjective function optimization using nondominated sorting genetic algorithms. En *Evolutionary Computation.* Vol. 2, No. 3, 221-248.

Svenson, O. (1996). Decision making and the search for fundamental psychological regularities: what can we learn from a process perspective? En *Organisational Behaviour and Human Decision Processes*. Vol. 65, 252–267.

Tan, K.C., Khor, E.F. y Lee T.H. (2005). Multiobjective Evolutionary Algorithms and Applications. Londres, Inglaterra. Springer-Verlag.

Teghem, J. (2009). Multi-objetive Combinatorial Optimization – MOCO. En Floudas, Ch., y Pardalos P. (Eds.), *Encyclophedia of Optimization*. 2nd ed. (pp. 2434-2442). New York, USA: Springer Science + Business Media, LLC.

Tersine, R. (2007). Two Organization Decision Theory - A Synthesis. En *Engineering Management Review, IEEE.* Vol. 2, No. 4, 39 – 50.

Tsoukiàs, A. (2007). On the concept of decision aiding process: an operational perspective. En *Annual Operational Research*. Vol. 154, 3 – 27.

Tversky, A. (1969). Intransitivity of preferences. En *Psychological Review*. Vol. 76, 31–48.

Tversky, A. (1972). Elimination by aspects: a theory of choice. En *Psychological Review*. Vol. 79, 281–299.

Tversky, A. (1977). On the elicitation of preferences: descriptive and prescriptive considerations. En Bell, D., Keeney, R. y Raiffa, H. (Eds.). *Conflicting objectives in decisions*. (pp. 209–222). New York, USA. Wiley.

Vanderpooten, D. (2002). Modelling in decision aiding. En D. Bouyssou, E. Jacquet-Lagrèze, P. Perny, R. Slowinski, D. Vanderpooten & Ph. Vincke (Eds.), *Aiding decisions with multiple criteria: essays in honour of Bernard Roy.* (pp. 195–210). Dordrecht, Holanda. Kluwer Academic.

Varderstoep, Scott W. y Johnston, Deirdre D. (2009). *Blending Qualitative and Quantitative Approaches*. EUA. John Wiley & Sons.

Vincke, Ph. (1992). *Multicriteria decision-aid*. New York, USA: Wiley.

Von Neumann, J., y Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. Princeton: Princeton University Press. Second edition in 1947, third in 1954.

Von Winterfeldt, D., & Edwards, W. (1986). *Decision analysis and behavorial research*. Cambridge: Cambridge University Press.

Voss, S. (2009). Metaheuristics. En Floudas, Ch., y Pardalos P. (Eds.), *Encyclophedia of Optimization*. 2nd ed. (pp. 2434-2442). New York, USA. Springer Science + Business Media, LLC.

Wakker, P. (1989). *Additive representations of preferences—a new foundation of decision analysis*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic.

Watzlawick, P., Weakland, J. H., y Fisch, R. (1974). *Change; principles of problem formation and problem resolution*. New York, USA: Norton.

Weber, E. U., y Çoskunoˇglu, O. (1990). Descriptive and prescriptive models of decision making: implications for the development of decision aid. En *IEEE Transactions on Systems, Mans and Cybernetics*. Vol. 20, 310–317.

Xu R. y Wunsch II D. (2009). *Clustering*. USA: Wiley.

Zitzler, E. y Thiele, L. (1999). Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach. En *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. Vol. 3, No. 4, 257-271.

Zitzler E., Laumanns M. y Thiele L. (2001). *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. Technical Report 103, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, Gloriastrasse 35, CH-8092 Zurich, Suiza.

Zopounidis, C. y Doumpos, M. (2000). PREFDIS: A multicriteria decision support system for sorting decision problems. En *Computers & Operations Research*. Vol. 27, No. 7–8, 779–797.

Zopounidis, C. y Pardalos P. (Eds.) (2010). *Handbook of Multicriteria Analysis*. Alemania: Springer Verlag.

ANEXOS

Anexo 1. Resultados del MOEA-POSET en la prueba de rankings inducidos

Factor L	Numero de clases	Número de alternativas	Soluciones óptimas encontradas	Soluciones óptimas no encontradas
3	3	15	100	0
3	3	30	100	0
3	3	60	99	1
3	3	90	100	0
3	3	120	100	0
3	3	150	98	2
3	5	15	100	0
3	5	30	100	0
3	5	60	96	4
3	5	90	77	23
3	5	120	55	45
3	5	150	84	16
3	7	15	86	14
3	7	30	100	0
3	7	60	100	0
3	7	90	84	16
3	7	120	90	10
3	7	150	38	62
3	9	15	1	99
3	9	30	88	12
3	9	60	90	10
3	9	90	71	29
3	9	120	53	47
3	9	150	34	66
3	11	15	0	100
3	11	30	66	44
3	11	60	85	15
3	11	90	61	39
3	11	120	51	49
3	11	150	27	73
5	3	15	100	0
5	3	30	100	0
5	3	60	100	0
5	3	90	100	0
5	3	120	100	0
5	3	150	97	3
5	5	15	94	6
5	5	30	100	0
5	5	60	95	5
5	5	90	72	28
5	5	120	56	44
5	5	150	82	18
5	7	15	39	61
5	7	30	95	5
5	7	60	98	2
5	7	90	80	20

5	7	120	80	20
5	7	150	36	64
5	9	15	0	100
5	9	30	47	53
5	9	60	83	17
5	9	90	60	40
5	9	120	46	54
5	9	150	30	70
5	11	15	0	100
5	11	30	26	74
5	11	60	37	63
5	11	90	53	47
5	11	120	39	61
5	11	150	27	73
7	3	15	100	0
7	3	30	100	0
7	3	60	100	0
7	3	90	100	0
7	3	120	100	0
7	3	150	97	3
7	5	15	81	19
7	5	30	100	0
7	5	60	99	1
7	5	90	70	30
7	5	120	47	53
7	5	150	80	20
7	7	15	6	94
7	7	30	74	26
7	7	60	87	13
7	7	90	82	18
7	7	120	84	16
7	7	150	23	77
7	9	15	0	100
7	9	30	18	82
7	9	60	50	50
7	9	90	50	50
7	9	120	41	59
7	9	150	25	75
7	11	15	0	100
7	11	30	8	92
7	11	60	11	89
7	11	90	34	66
7	11	120	30	70
7	11	150	22	78
9	3	15	100	0
9	3	30	100	0
9	3	60	100	0
9	3	90	100	0
9	3	120	100	0
9	3	150	96	4
9	5	15	68	32
9	5	30	98	2
9	5	60	99	1
9	5	90	57	43

9	5	120	51	49
9	5	150	77	23
9	7	15	7	93
9	7	30	47	53
9	7	60	75	25
9	7	90	79	21
9	7	120	75	25
9	7	150	25	75
9	9	15	0	100
9	9	30	7	93
9	9	60	27	73
9	9	90	37	63
9	9	120	33	67
9	9	150	22	78
9	11	15	0	100
9	11	30	4	96
9	11	60	1	99
9	11	90	15	85
9	11	120	17	83
9	11	150	22	78
11	3	15	100	0
11	3	30	100	0
11	3	60	100	0
11	3	90	100	0
11	3	120	100	0
11	3	150	97	3
11	5	15	59	41
11	5	30	87	13
11	5	60	98	2
11	5	90	72	28
11	5	120	48	52
11	5	150	78	22
11	7	15	4	96
11	7	30	34	66
11	7	60	57	43
11	7	90	75	25
11	7	120	76	24
11	7	150	20	80
11	9	15	0	100
11	9	30	2	98
11	9	60	5	95
11	9	90	12	88
11	9	120	34	66
11	9	150	23	77
11	11	15	0	100
11	11	30	2	98
11	11	60	0	100
11	11	90	4	96
11	11	120	13	87
11	11	150	12	88

Anexo 2. Desempeño de las alternativas por criterio del estudio de caso

Alternativa	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
a1	9.50	Frijol	5	Prendaria	16	37	Media	Buena
a2	10.00	Frijol	10	Usufructuaria	13	14	Alta	Buena
a3	10.00	Frijol	7	Usufructuaria	7	40	Baja	Buena
a4	7.00	Frijol	1	Usufructuaria	7	43	Media	Buena
a5	11.00	Frijol	10	Usufructuaria	11	6	Media	Muy buena
a6	4.00	Frijol	3	Prendaria	33	13	Media	Muy buena
a7	15.00	Frijol	8	Usufructuaria	25	16	Media	Buena
a8	7.00	Frijol	4	Hipotecaria	9	41	Media	Muy buena
a9	10.50	Frijol	8	Hipotecaria	4	9	Media	Muy buena
a10	2.00	Frijol	10	Hipotecaria	13	47	Alta	Regular
a11	4.00	Frijol	1	Usufructuaria	23	12	Alta	Muy buena
a12	4.00	Frijol	1	Prendaria	8	14	Media	Buena
a13	6.00	Frijol	4	Hipotecaria	11	3	Alta	Buena
a14	5.00	Frijol	8	Usufructuaria	17	31	Baja	Buena
a15	4.00	Frijol	5	Prendaria	2	51	Media	Buena
a16	6.00	Frijol	10	Prendaria	71	58	Media	Buena
a17	6.00	Frijol	10	Usufructuaria	7	21	Alta	Buena
a18	11.00	Frijol	5	Prendaria	3	10	Media	Buena
a19	2.00	Frijol	10	Hipotecaria	11	54	Media	Buena
a20	10.00	Frijol	3	Prendaria	6	14	Media	Buena
a21	5.00	Frijol	5	Usufructuaria	2	3	Media	Buena
a22	4.00	Frijol	8	Hipotecaria	8	52	Alta	Buena
a23	23.00	Frijol	10	Hipotecaria	20	21	Media	Buena
a24	12.00	Frijol	2	Hipotecaria	64	6	Alta	Buena
a25	14.00	Frijol	7	Hipotecaria	23	11	Baja	Buena
a26	3.00	Frijol	10	Usufructuaria	4	40	Media	Buena
a27	7.50	Frijol	3	Prendaria	20	55	Baja	Regular
a28	6.00	Frijol	10	Usufructuaria	8	67	Media	Buena
a29	10.00	Frijol	2	Hipotecaria	22	66	Media	Buena
a30	8.00	Frijol	10	Prendaria	19	61	Media	Muy buena
a31	5.00	Frijol	10	Prendaria	19	37	Baja	Buena
a32	5.00	Frijol	1	Usufructuaria	5	10	Media	Buena
a33	5.00	Frijol	1	Usufructuaria	26	8	Baja	Buena
a34	8.00	Frijol	10	Usufructuaria	10	62	Media	Buena
a35	7.50	Frijol	10	Usufructuaria	29	13	Baja	Buena
a36	18.00	Frijol	10	Usufructuaria	16	25	Baja	Buena
a37	10.00	Frijol	5	Usufructuaria	1	8	Baja	Buena
a38	6.00	Frijol	3	Usufructuaria	26	17	Media	Buena
a39	4.50	Frijol	7	Prendaria	33	41	Baja	Muy buena

a40	2.00	Frijol	6	Prendaria	17	66	Media	Regular
a41	9.00	Frijol	10	Prendaria	49	21	Nula	Buena
a42	3.50	Frijol	5	Hipotecaria	18	4	Alta	Buena
a43	5.00	Frijol	1	Usufructuaria	17	19	Media	Buena
a44	5.00	Frijol	5	Usufructuaria	15	10	Media	Buena
a45	2.00	Frijol	7	Usufructuaria	61	8	Alta	Buena
a46	11.00	Frijol	10	Usufructuaria	11	39	Alta	Buena
a47	13.00	Frijol	10	Usufructuaria	10	62	Alta	Buena
a48	4.50	Frijol	10	Usufructuaria	4	16	Nula	Buena
a49	12.00	Frijol	1	Prendaria	2	40	Media	Buena
a50	2.00	Frijol	2	Usufructuaria	23	7	Alta	Regular
a51	7.00	Frijol	8	Hipotecaria	10	75	Alta	Buena
a52	20.00	Garbanzo	1	Usufructuaria	31	18	Media	Buena
a53	7.00	Garbanzo	10	Prendaria	12	51	Alta	Buena
a54	5.50	Garbanzo	8	Usufructuaria	11	65	Media	Buena
a55	6.00	Garbanzo	8	Usufructuaria	16	10	Alta	Buena
a56	10.00	Garbanzo	1	Prendaria	14	9	Media	Regular
a57	20.00	Garbanzo	8	Prendaria	3	10	Alta	Buena
a58	12.00	Maiz	10	Hipotecaria	33	35	Nula	Muy buena
a59	10.00	Maiz	10	Hipotecaria	5	10	Baja	Buena
a60	3.00	Maiz	5	Prendaria	1	38	Alta	Buena
a61	30.00	Maiz	10	Prendaria	30	58	Alta	Buena
a62	3.00	Maiz	10	Prendaria	21	31	Nula	Buena
a63	6.00	Maiz	4	Usufructuaria	15	12	Alta	Regular
a64	8.00	Maiz	4	Usufructuaria	21	11	Baja	Buena
a65	15.00	Maiz	10	Prendaria	2	8	Baja	Buena
a66	9.00	Maiz	4	Hipotecaria	7	60	Alta	Buena
a67	6.00	Maiz	3	Usufructuaria	18	18	Media	Buena
a68	7.00	Maiz	1	Prendaria	1	11	Media	Muy buena
a69	8.00	Maiz	1	Usufructuaria	25	16	Alta	Buena
a70	5.00	Maiz	10	Hipotecaria	7	24	Baja	Buena
a71	2.00	Maiz	10	Hipotecaria	29	53	Baja	Buena
a72	8.00	Maiz	8	Usufructuaria	4	30	Alta	Buena
a73	8.00	Maiz	1	Usufructuaria	25	55	Media	Buena
a74	11.00	Maiz	10	Hipotecaria	9	57	Media	Buena
a75	5.00	Maiz	10	Prendaria	30	21	Media	Buena
a76	6.00	Maiz	1	Hipotecaria	16	5	Alta	Buena
a77	7.00	Maiz	5	Hipotecaria	40	18	Nula	Buena
a78	9.00	Maiz	5	Usufructuaria	70	42	Media	Buena
a79	15.00	Maiz	3	Hipotecaria	10	62	Media	Buena
a80	20.00	Maiz	5	Usufructuaria	8	36	Media	Buena
a81	5.00	Maiz	6	Usufructuaria	19	42	Media	Buena
a82	7.00	Maiz	1	Usufructuaria	21	50	Baja	Regular

a83	7.00	Maiz	3	Prendaria	7	33	Media	Buena
a84	4.00	Maiz	10	Usufructuaria	67	38	Alta	Buena
a85	5.00	Maiz	10	Usufructuaria	8	26	Media	Buena
a86	5.00	Maiz	1	Usufructuaria	13	12	Media	Regular
a87	5.00	Maiz	10	Usufructuaria	15	70	Baja	Buena
a88	2.00	Maiz	10	Prendaria	1	65	Alta	Buena
a89	2.50	Maiz	2	Hipotecaria	28	69	Media	Buena
a90	3.00	Maiz	6	Prendaria	20	12	Media	Buena
a91	6.00	Maiz	10	Prendaria	39	41	Media	Buena
a92	10.00	Maiz	3	Hipotecaria	10	80	Media	Buena
a93	5.00	Maiz	5	Hipotecaria	7	57	Media	Buena
a94	6.00	Maiz	10	Prendaria	35	65	Baja	Buena
a95	9.50	Maiz	1	Usufructuaria	28	52	Media	Buena
a96	6.00	Maiz	2	Usufructuaria	3	14	Baja	Buena
a97	4.00	Maiz	7	Usufructuaria	19	43	Media	Regular
a98	2.50	Maiz	3	Prendaria	27	26	Media	Buena
a99	10.00	Maiz	5	Usufructuaria	2	24	Media	Buena
a100	8.00	Maiz	10	Prendaria	17	45	Media	Muy buena
a101	6.00	Maiz	10	Prendaria	13	30	Nula	Buena
a102	3.00	Maiz	5	Usufructuaria	22	51	Media	Regular
a103	3.00	Maiz	10	Usufructuaria	7	36	Baja	Muy buena
a104	3.00	Maiz	10	Prendaria	14	48	Baja	Buena
a105	13.00	Trigo	3	Prendaria	5	35	Alta	Buena

APÉNDICES

Apéndice A. Relaciones de equivalencia y relaciones de orden

Las relaciones son la forma más básica de imponer una estructura en un conjunto. Los dos tipos más importantes: las relaciones de *equivalencia* y las relaciones de *orden*. Las equivalencias son las que permiten clasificar los elementos de un conjunto. Por su parte, los órdenes son los que ordenan los elementos de un conjunto.

1. Relaciones

Una relación es un objeto matemático para describir conexiones entre los elementos de un conjunto. De manera particular, son de interés las relaciones de equivalencia y las relaciones de orden. La primera de ellas es la forma matemática de establecer clasificaciones, mientras que la segunda consiste en ordenar objetos.

Una relación se trata de decir que elementos están relacionados con cuáles, a través de parejas ordenadas (a,b), que significa que el elemento a está relacionado con elemento b.

1.1. Definición. Una relación R en un conjunto A es un subconjunto no vacío del producto cartesiano $A \times A$.

Para denotar que un elemento a está relacionado con otro b por la relación R se escribe $(a,b) \in R$ o también aRb.

El estudio matemático de las relaciones se concentra en la estructura que impone la relación en el conjunto, independientemente de cómo se haya definido. Para ello, se estudian las propiedades de las relaciones que se definen independientemente del significado de la relación. A continuación se describen formalmente tales propiedades:

1.2. Definición. Una relación definida en un conjunto se llama *reflexiva* si cada elemento del conjunto está relacionado consigo mismo. Es *irreflexiv*a si ningún elemento se relaciona consigo mismo.

$R\ reflexiva \Leftrightarrow \forall x \in A, xRx$,

$R\ irreflexiva \Leftrightarrow \forall x \in A, x \neg Rx$, donde $\neg$ es el símbolo de negación

1.3. Definición. Una relación es *simétric*a si para cada pareja de la relación, la pareja en orden inverso también forma parte de la relación. Es *asimétrica* si para toda pareja en la relación se cumple que su inversa no está en la relación. Por último, una relación *antisimétrica* es aquélla en que las únicas parejas cuyas inversas también son parte de la relación son las parejas de elementos iguales.

$R\ simétrica \Leftrightarrow \forall x, y(xRy \rightarrow yRx)$,

$R\ asimétrica \Leftrightarrow \forall x, y(xRy \rightarrow y \neg Rx)$,

$R\ antisimétrica \Leftrightarrow \forall x, y((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)$, donde $\wedge$ es la conjunción.

Definición. Una relación es *transitiva* si siempre que un elemento se relaciona con un segundo elemento, y este con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero.

$R\ transitiva \Leftrightarrow \forall x, y, z((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$.

Las propiedades definidas no son todas independientes. Las propiedades reflexiva e irreflexiva son incompatibles, de igual manera que las propiedades de simetría y antisimetría.

A continuación se presentan los tipos de relaciones más importantes: relaciones de equivalencia y relaciones de orden.

2. Relaciones de equivalencia

Una relación de equivalencia es la herramienta matemática para hacer clasificaciones y puede ser definida como sigue:

2.1. Definición. Una relación es una equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. Si el elemento a está relacionado con el elemento b, se denota como $a \sim b$.

2.2. Definición. Dada una equivalencia R definida en A y un elemento a del conjunto A, la clase de equivalencia de a es el subconjunto de los elementos relacionados con él. Se denota por $[a]$ y se dice que a es un representante de dicha clase. Se puede denotar como:

$$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

El representante de una clase es parte de la clase, ya que la relación es reflexiva. Pero, por otro lado, cualquier elemento de la clase puede ser un representante. Finalmente, elementos no relacionados entre sí están en clases diferentes. Se esto se describe un teorema:

Teorema: Sea R una equivalencia definida en un conjunto A, entonces:
1. cada elemento del conjunto está en la clase que representa, es decir, $\forall a \in A$,

$$a \in [a].$$

2. dos elementos están relacionados si y sólo si, están en la misma clase de equivalencia, es decir, $\forall a, b \in A$,

$$a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$$

3. Equivalencias y particiones

Las clases de equivalencia constituyen una clasificación de los elementos de un conjunto. Todo elemento está en una clase de equivalencia y sólo en una. A continuación se define el concepto de *clasificación* o *partición*. En dicha definición, no se hace alusión a los elementos, sino a subconjuntos, pero es equivalente a decir que cada elemento está en uno y sólo uno, de tales subconjuntos:

3.1. Definición. Una partición de un conjunto A es una familia de subconjuntos de A, $\{A_\alpha\}\alpha \in I$, donde I es un conjunto de índices, tal que la unión de todos los subconjuntos es el conjunto A y la intersección de dos diferentes cualesquiera es vacía.

Es decir, $\{A_\alpha\}\alpha \in I$ es una partición de A si

1. $\forall \alpha \in I, A_\alpha \subset A$

2. $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A$

3. $\forall \alpha, \beta \in I (\alpha \neq \beta \rightarrow A_\alpha \bigcap A_\beta = \varnothing)$

Finalmente, se define el concepto de *conjunto cociente*. El conjunto cociente es el conjunto de las clases de equivalencia en las que queda dividido el conjunto original.

3.2. Definición. Dada una equivalencia R definida en un conjunto A, el conjunto cociente, denotado A/R (o también $A/\sim$) es el conjunto de las clases de equivalencia de la relación, esto es

$$A/R = \{[a] \in P(A) \mid a \in A\}.$$

4. Relaciones de orden

Una *relación de orden* o simplemente *orden*, es la herramienta matemática diseñada para ordenar los elementos de un conjunto. Basados en la teoría de conjuntos, los elementos de un conjunto no están ordenados, por lo tanto, el conjunto $\{a, b, c\}$ es el mismo conjunto que el $\{c, b, a\}$. El orden supone una estructura añadida al conjunto y se requiere mediante la definición en él de una relación apropiada.

Para establecer un orden se deben señalar que elementos preceden a cuáles. Esto se indica a través de la relación: si a precede a b, entonces $(a, b) \in R$. La pareja inversa no puede ser parte de la relación, por lo cual solicita ésta sea una asimétrica. Además, si un elemento precede a otro y éste a un tercero, entonces el primero debe preceder al tercero para evitar relaciones cíclicas, por lo tanto, se exige transitividad.

4.1. Definición. Una relación R definida en un conjunto A es un orden si todo elemento de A está en el dominio o en el contradominio y es asimétrica y transitiva. El símbolo < se usa para denotar el orden, por tanto $a < b$ significa que $(a, b) \in R$. El par (A, R) se llama conjunto ordenado. Donde $a < b$ se lee "a precede a b", "b sucede a a", "a es menor que b" o "b es mayor que a".

4.2. Orden Total o Completo

4.2.1. Definición. Un orden R en el conjunto A es *total* si dados dos elementos cualesquiera o bien son iguales, o bien uno precede al otro.

$\forall x, y \in A, (x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)$, donde $\vee$ es la disyunción.

Esta propiedad también recibe el nombre de tricotomía, por las tres opciones que permite a cada pareja de elementos x y y. Cuando un orden no es total, para recalcar la ausencia de esta propiedad a veces se denomina *orden parcial*.

4.2.2. Definición. En un conjunto totalmente ordenado A el elemento y es inmediato sucesor del elemento x, si y sucede a x y cualquier otro elemento que sucede a x también sucede a y, es decir, si

$$(x < y) \wedge \forall z, (x < z \rightarrow y \leq z).$$

En este caso, se dice que x es inmediato antecesor de y.

4.2.3. Definición. Un orden total tiene la propiedad de inmediato sucesor si todo elemento que no sea máximo tiene un inmediato sucesor. Análogamente, un orden total tiene la propiedad de inmediato antecesor si todo elemento que no sea mínimo tiene un inmediato antecesor.

4.3. Preorden parcial

4.3.1. Definición: La relación de preorden R en un conjunto A es una relación (A, R) que tiene las siguientes propiedades:

a) Reflexiva, si $a \in A$ entonces $a < a$

b) Transitiva, si $a < b$ y $b < z$ entonces $a < z$

4.4. Orden parcial

4.4.1. Definición: Una relación de orden parcial R en un conjunto A es una relación (A, R) que tiene las siguientes propiedades:

a) Reflexiva, si $a \in A$ entonces $a < a$

b) Antisimétrica, si $a < b$ y $b < a$ entonces $a = b$

c) Transitiva, si $a < b$ y $b < z$ entonces $a < z$

Apéndice B. La fase de explotación de ELECTRE-III

Para conformar el ranking a partir de una relación de sobreclasificación valuada, ELECTRE-III implementa el denominado *proceso de destilación*. En este proceso se definen dos preordenes completos: la *cadena de destilación descendente* y la *cadena de destilación ascendente* y para generar dichos preordenes se realizan las siguientes acciones (Bufardi, Gheorghe y Xirouchakis, 2008):

Sea $\lambda_0 = \max S(a,b), a,b \in A$[28]. En cada iteración de las cadenas de destilación descendente o ascendente, un umbral de discriminación $s(\lambda)$ y una relación crisp D son definidas tal que:

$$D(a,b) = \begin{cases} 1 & si\ S(a,b) > \lambda - S(\lambda) \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

Para cada alternativa a, una puntuación de calificación $Q(a)$ es calculado como el número de alternativas que son sobreclasificadas por un (número de alternativas a tal que $D(a,b) = 1$) menos el número de alternativas, las cuales sobreclasifican a a (número de alternativas b tal que $D(b,a) = 1$).

ELECTRE-III proporciona al tomador de decisiones dos preordenes completos. El primero de ellos es obtenido en una forma descendente, iniciando con la selección de las alternativas con la mejor puntuación de calificación y finalizando con la selección de las alternativas que tuvieron la peor puntuación de calificación. El segundo preorden es obtenido de una manera ascendente, caso contrario al anterior preorden, primero se seleccionan las alternativas la peor puntuación de calificación y se finaliza con la asignación de las alternativas que tuvieron la mejor puntuación de calificación.

[28] λ_0 es un nivel de corte y $S(a,b)$ es la relación de sobreclasificación valuada de a respecto a b.

Cadena de destilación descendente

En este procedimiento, el conjunto de alternativas que tienen la puntuación de calificación más grande constituyen el primer destilado y es denotado como D_1. Si D_1 contiene sólo una alternativa, el procedimiento se realiza en el conjunto $A \setminus D_1$. De otra manera esto es aplicado a D_1 y un destilado D_2 será obtenido. Si D_2 tiene una sola alternativa, entonces el procedimiento es aplicado en $D_1 \setminus D_2$ si este no es vacío; de otra manera, el procedimiento es aplicado en D_2. Este procedimiento es repetido hasta que el destilado D_1 es completamente explorado. Entonces, el procedimiento inicia explorando $A \setminus D_1$ para encontrar un nuevo destilado. El procedimiento es repetido hasta que un preorden de alternativas es obtenido. Este procedimiento es llamado cadena de destilación descendente porque inicia con las alternativas que tienen las cualificaciones más altas y finaliza con las alternativas que tienen la calificación más baja.

El resultado del procedimiento descendente es un conjunto de clases $C_1, C_2, .., C_k$ con $k \leq n$, donde $n = |A|$. Las alternativas que pertenecen a la misma clase son consideradas indiferentes y, una alternativa que pertenece a una clase sobreclasifica a todas las alternativas pertenecientes a clases con índices más altos. Por tanto, el primer preorden completo de alternativas es obtenido.

Cadena de destilación ascendente

El procedimiento de destilación ascendente es el mismo procedimiento descendente excepto que el criterio de selección de alternativas está basado en el principio de la calificación más baja. El resultado de este procedimiento es un conjunto de clases $C_1, C_2, .., C_h$ con $h \leq n$, donde $n = |A|$. Esas clases son escritas de tal manera que dos alternativas en la misma clase son consideradas indiferentes y una alternativa que pertenece a una clase sobreclasifica a todas las alternativas pertenecientes a clases con los índices más bajos. Con esto, se obtiene el segundo preorden completo de alternativas.

Preorden parcial de ELECTRE-III

El resultado de ELECTRE-III es un preorden parcial de alternativas basado en la comparación de los dos preordenes completos obtenidos a través de las cadenas de destilaciones descendentes y ascendentes.

Apéndice C. La fase de explotación de PROMETHEE II

De acuerdo con Bufardi, Gheorghe y Xirouchakis (2008), en la fase de explotación para la creación de un ranking a partir de una relación de sobreclasificación valuada, cada alternativa $a \in A$, está asociada a dos valores $\phi^+(a)$ y $\phi^-(a)$.

- $\phi^+(a)$, el cual es llamado *flujo de salida*, es computado de la siguiente manera:

$$\phi^+(a) = \sum_{b \in A} \prod (a,b)$$

- $\phi^-(a)$, el cual es llamado *flujo de entrada*, es computado de la siguiente manera:

$$\phi^-(a) = \sum_{b \in A} \prod (b,a)$$

Se puede apreciar que $\phi^+(a)$ representa el grado por el cual la alternativa a sobreclasifica a las otras alternativas y que $\phi^-(a)$ representa el grado por el cual la alternativa a es sobreclasificada por las otras alternativas.

El más alto flujo de salida y el flujo de entrada más bajo, es la mejor alternativa. Los dos flujos inducen los siguientes preordenes completos (ranking de alternativas con la consideración de indiferencia) sobre las alternativas, donde P e I son las relaciones de preferencia e indiferencia respectivamente:

- $aP^+b \Leftrightarrow \phi^+(a) > \phi^+(b)$
- $aI^+b \Leftrightarrow \phi^+(a) = \phi^+(b)$
- $aP^-b \Leftrightarrow \phi^-(a) < \phi^-(b)$
- $aI^-b \Leftrightarrow \phi^-(a) = \phi^-(b)$

donde P^+, I^+ se refieren a los flujos de salida, mientras que P^-, I^- se refieren a los flujos de entrada.

Al ordenar las alternativas en orden decreciente de los números $\phi^+(a)$ y en orden creciente de los números de $\phi^-(a)$, dos preordenes completos pueden ser obtenidos. Su intersección conduce al orden parcial de PROMETHEE I como sigue:

$$aSb\,(a\ \ estrictamente\ sobreclasifica\ a\ \ b)\begin{cases} si\ \ aP^+b\ \ y\ \ aP^-b \\ ó\ \ aP^+b\ \ y\ \ aI^-b \\ ó\ \ aI^+b\ \ y\ \ aP^-b \end{cases}$$

$$aIb\,(a\ \ es\ indiferente\ a\ \ b)\ si\ aI^+b\ \ y\ \ aI^-b$$

$$aJb\,(a\ \ y\ \ b\ \ son\ incomparables)\ \ de\ otra\ manera$$

es decir, $\neg aSb$, $\neg bSa$ y $\neg aIb$, donde "$\neg$" denota negación.

Para cada alternativa a, un *Flujo Neto* $\phi(a)$ puede ser obtenido al restar el flujo de entrada $\phi^-(a)$ al flujo de salida $\phi^+(a)$; es decir, $\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$. Al ordenar las alternativas en el orden decreciente de ϕ, se obtiene un único preorden completo de PROMETHEE II.